Б. А. Золотов Е. И. Тодоров
Д. Г. Штукенберг

Математика НОН-СТОП 2020

Решения задач олимпиады

Фонд «Время Науки»

Математика НОН-СТОП — 2020

Решения задач олимпиады

Б. А. Золотов Е. И. Тодоров

Д. Г. Штукенберг

под редакцией И. А. Чистякова

Фонд «Время науки»
Санкт-Петербург
2020 год

Сборник издан с использованием гранта Президента Российской Федерации на развитие гражданского общества, предоставленного Фондом президентских грантов

Математика НОН-СТОП — 2020. Решения задач олимпиады / Б. А. Золотов, Е. И. Тодоров, Д. Г. Штукенберг, под ред. И. А. Чистякова. — СПб.: Фонд «Время науки», 2020. — 80 с.

ISBN 978-5-6045675-2-4

В брошюре представлены условия и решения задач олимпиады «Математика НОН-СТОП — 2020». Олимпиада проводится Фондом «Время Науки» для учеников из Санкт-Петербурга и других регионов Российской Федерации, а также Республики Беларусь.

Издание предназначено для учащихся средних школ, интересующихся математикой, и их преподавателей.

ISBN 978-5-6045675-2-4

Содержание

4 класс **8**

Эскалаторы 8

Быстрое метро 9

Шутка 12

Кирпичей требуют наши сердца 13

По сетке 15

Не пизанская, но и не ханойская 18

5 класс **19**

Разрезания — 1 19

Семнадцатый независимый 21

Селфхак 22

Не пользуясь телепортацией 24

6 класс **26**

Разделяй и властвуй 26

Опубликовать за 60 секунд 28

Лифт 31

Сортировка — 1 34

Пульт от кондиционера 34

Отражённые объекты интереснее, чем кажутся 36

Снежинки 38

7 класс **40**

Мелочь, а неприятно 40

Сумма простых — простое? 42
Игры с котиком 44
Зелёная волна 45
Отряды охраны 47
Всё очень плохо, вокруг сплошная слякоть 48

8 класс **49**
Расписание 49
Разрезания — 2 53
«Это портал!» 54
Числа Фибоначчи 57
Музыкальная 59
Объясните свою двойковость 61
На плоскости 61
Нужно уметь считать 63
Сортировка — 2 65
Операция Струя 66

Условия задач профильного варианта, 7 класс **66**
Не идёт на лад 67
Високосные года 70
Максимально 73

Условия задач профильного варианта, 8 класс **75**
Заполнение прямоугольниками 75

Предлагаем вашему вниманию сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП — 2020». Задачи базовых вариантов приведены с подробными полными авторскими решениями. Задачи профильного варианта приведены лишь в виде условий и могут быть использованы в дальнейшем как основы исследовательских проектов для школьников.

Верим, что данная брошюра окажется полезным материалом для занятий математикой и сможет мотивировать школьников принимать участие в математических олимпиадах.

Мы благодарим Санкт-Петербургскую академию постдипломного педагогического образования и Елену Юрьевну Лукичёву за неоценимую помощь в проведении, продвижении и популяризации олимпиады.

Желаем приятного чтения!

ВРЕМЯ НАУКИ

Фонд «Время науки» основан в 2015 году. Более 5 лет Фонд развивает крупнейший в РФ конкурс научных работ школьников — Балтийский научно-инженерный конкурс, а также тематические петербургские научные соревнования, в которых принимает участие более 10 тысяч школьников.

Фонд «Время науки» сохраняет все свои мероприятия бесплатными для участников. Главные проекты Фонда — это Балтийский научно-инженерный конкурс, Санкт-Петербургский турнир юных математиков, Открытая городская олимпиада «Математика НОН-СТОП».

Фонд осуществляет поддержку научных семинаров «Лаборатории непрерывного математического образования»:

`http://lnmo.ru/special`,

а также поддержку образовательных площадок, призванных развивать исследовательские способности школьников, в государственных школах.

`www.timeforscience.ru` `mail@timeforscience.ru`
8 (812) 980-42-47

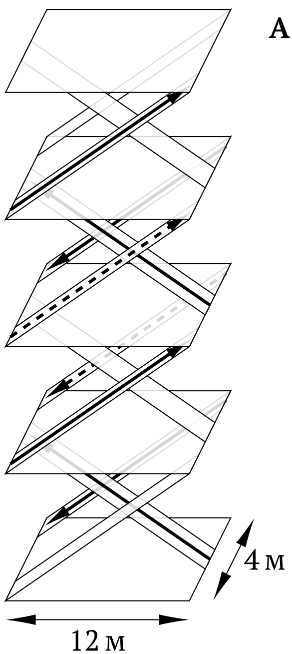
Задачи 4 класса

Задача 1. Эскалаторы

В торговом центре «Кругленький» пять этажей. Соседние этажи соединяют по три эскалатора, как показано на рисунке слева. По утрам администратор запускает каждый из эскалаторов вверх или вниз. Ему бы хотелось, чтобы посетителям торгового центра было как можно более удобно перемещаться по центру.

Эскалаторная клетка имеет размеры 12 м $\times$ 4 м. Площадками будем называть два места на этаже, где встречаются по три эскалатора.

Администратор называет способ запустить эскалаторы *хорошим,* если с любого этажа можно добраться до любого другого, не проходя ни по одному из промежуточных этажей более 5 метров.



А. Приведите пример хорошего способа запустить эскалаторы. Сколько всего существует хороших способов запустить эскалаторы?

Решение: Заметим, что хороший способ запустить эскалаторы содержит в себе два «каскада». Один состоит из эскалаторов, идущих вверх, где каждый эскалатор отправляется с площадки, на которую прибыл предыдущий. Другой, соответственно, состоит из эскалаторов, идущих вниз. Каскады отмечены на рисунке. Возможный пример хорошего способа запустить эскалаторы — так, как указано на рисунке, а остальные эскалаторы — как угодно.

Посчитаем все хорошие способы запустить эскалаторы.

Площадки, через которые проходит каскад, идущий вверх, чередуются: правая-левая-правая, то же можно сказать и про каскад, идущий вниз. Эти два каскада не могут проходить через одну и ту же площадку, так как на площадке встречаются три эскалатора, а двум каскадам потребовались бы четыре.

Для начала нужно выбрать, с какой площадки стартует каскад, идущий вверх, — это можно сделать двумя способами. Затем нужно назначить направления движения в каждой паре параллельных эскалаторов, при том что один из них обязательно должен принадлежать одному из каскадов. Это всегда можно сделать тремя способами: «только правый едет куда надо», «только левый едет куда надо», «оба едут куда надо».

Ответ — $2 \cdot 3^4 = 162$.

B. Верно ли, что при любом хорошем способе запустить эскалаторы на каждом этаже найдётся такая площадка (правая или левая), с которой можно уехать только в одну сторону — либо вверх, либо вниз?

Решение: Это неверно, см. пунктирные стрелки на рисунке. Однако данное утверждение верно либо для всех чётных, либо для всех нечётных этажей, потому что оба «одиноких» эскалатора будут вынуждены «входить» в эти этажи, и с площадок, куда входят эти эскалаторы, будет невозможно уехать в сторону, противоположную их движению.

C. Докажите, что при любом хорошем способе запустить эскалаторы одиночные эскалаторы, расположенные по центру клетки (соединяющие правую площадку этажа ниже с левой площадкой этажа выше), чередуют своё направление: один запущен вверх, тот, что над ним — вниз, следующий — опять вверх.

Решение: Легко видеть, что все одиночные эскалаторы принадлежат какому-то из двух описанных нами каскадов. Например, каскад, идущий вверх, проходит через все чётные одиночные эскалаторы, а идущий вниз — через все нечётные (либо наоборот). На основании этого одиночные эскалаторы действительно чередуют свои направления.

Задача 2. Быстрое метро

A. В метро Санкт-Петербурга поезд разгоняется и замедляется с ускорением 1 метр в секунду за секунду. Время стоянки на станции — 30 секунд. После отправления со станции поезд движется равноускоренно (с ускорением 1 метр в секунду за секунду), достигает максимальной скорости 80 км/ч и перед станцией замедляется с тем же ускорением. Расстояние между станциями — 1700 метров. Какова средняя скорость поезда на длинной линии метро?

Решение: Сперва найдём время разгона поезда: $at = 80$ км/ч, 80 км/ч — это

$$\frac{80 \cdot 1000}{3600} = 22\frac{2}{9} \text{ м/с}$$

Отсюда при $a = 1$ м/с^2

$$t = 22\frac{2}{9} \text{ с}$$

Поезд за время разгона проедет $\frac{at^2}{2}$, то есть за время разгона и торможения

$$at^2 = \left(22\frac{2}{9}\right)^2 = 493\frac{67}{81} \text{ м.}$$

С полной скоростью поезд проедет оставшиеся $1206\frac{14}{81}$ м — на это потребуется $54\frac{5}{18}$ секунд.

Итого: $98\frac{13}{18} + 30$ секунд на один полный цикл, средняя скорость — $13\frac{479}{2317}$ метров в секунду или примерно 47 километров в час. Если решение сразу перейдёт к приблизительным цифрам (например, 22 вместо $22\frac{2}{9}$), за такое решение тоже можно ставить полный балл.

B. Перед проектировщиками поставлена задача повысить среднюю скорость до 60 километров в час, при неизменных ускорении и времени стоянки поезда. Какими выбрать максимальную скорость и расстояние между станциями, чтобы достичь требуемых параметров?

Решение: Рассмотрим задачу в общем виде: $at_1 = v$, отсюда $t_1 = \frac{v}{a}$, при разгоне и торможении будет пройдено

$$2 \cdot \frac{at_1^2}{2} = \frac{v^2}{a} \text{ метров.}$$

Оставшиеся $s - \frac{v^2}{a}$ метров поезд проедет с полной скоростью:

$$t_2 = \frac{s - \frac{v^2}{a}}{v} = \frac{s}{v} - \frac{v}{a}$$

Итого, полное время одного цикла (с учётом времени остановки t_3):

$$\frac{s}{v} - \frac{v}{a} + 2\frac{v}{a} + t_3 = \frac{s}{v} + \frac{v}{a} + t_3 \text{ секунд}$$

При скорости 60 километров в час на один километр требуется 60 секунд, то есть s проходится за $\frac{60s}{1000}$ секунд. Итого, ответы должны удовлетворять уравнению

$$\frac{s}{v} + \frac{v}{a} + t_3 = \frac{60s}{1000}$$

или, с подставленными цифрами,

$$\frac{s}{v} + v + 30 = \frac{60s}{1000}$$

Можно взять время разгона 45 секунд, поезд при этом проедет $\frac{at^2}{2} = 1012.5$ метров. То есть при длине перегона 2000 метров и максимальной скорости примерно 180 километров в час условия задачи будут достигнуты.

C. На линии длиной k километров находится N станций. Ускорение поезда — a метров в секунду за секунду, время стоянки — t секунд, максимальная скорость — v километров в час. В зависимости от расположения станций, каковы минимальная и максимальная средние скорости поезда?

Решение: Заметим, что максимальная скорость достигается при минимуме остановок. Соберём все остановки по краям перегона (на расстоянии 1 метр, например).

Минимальная же скорость получится при равномерных остановках.

Задача 3. Шутка

A. Нарисуйте некоторую геометрическую фигуру и объясните, почему никто из участников сегодняшней олимпиады «Математика НОН-СТОП» не нарисует такую же фигуру.

Решение: Описание должно быть действительно оригинальным. «Потому что это моё имя и персональные данные» — хорошо. Сложная фигура и честно посчитать вероятность её выпадения — хорошо.

«Я учился рисовать такие штуки 10 лет» — хорошо. «Такую фигуру никто не нарисует, потому что она очень простая» — плохо, потому один член жюри видел как минимум три таких объяснения в проверенных им работах. Но мы добрые, поэтому снижаем только 1 балл.

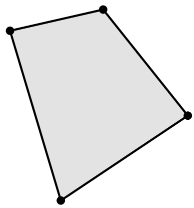
B. Хороший пароль должен

- Содержать цифру,
- Содержать как минимум одну строчную и ровно три заглавных буквы,
- Содержать номер текущего года,
- Содержать букву F во имя уважения к героям прошлого, а также как минимум две буквы ξ,
- Содержать одну из цифр два раза подряд,
- Содержать дефисов больше, чем букв,
- Состоять ровно из 16 символов.

Придумайте хороший пароль.

Решение: Количество хороших паролей в условиях этой задачи совсем небольшое, их можно посчитать. Один из таких паролей — $\xi\xi$20200FFF-------

C. Ромб — это четырёхугольник, у которого все стороны одинаковы. Квадрат — это четырёхугольник, у которого, кроме того, одинаковы все углы. Параллелограмм — это четырёхугольник, у которого противоположные стороны равны и параллельны. Дельтоид — четырёхугольник, у которого две пары смежных сторон одной длины. Рассмотрим следующий четырёхугольник:



Дайте ему название и опишите уникальное свойство, которым он обладает. Изобразите ещё три четырёхугольника, обладающих тем же свойством.

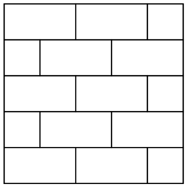
Решение: Принимать как «у него по часовой стрелке возрастают стороны», так и «я впервые увидел его сегодня». «У него различны все стороны» — плохое свойство, потому что им обладают все четырёхугольники (вероятность этого — 1).

Любое свойство, которое выполнено не с вероятностью 1, подходит, за него 9 баллов. За свойства, имеющие вероятность 1, ставится 4 балла.

Задача 4. Кирпичей требуют наши сердца

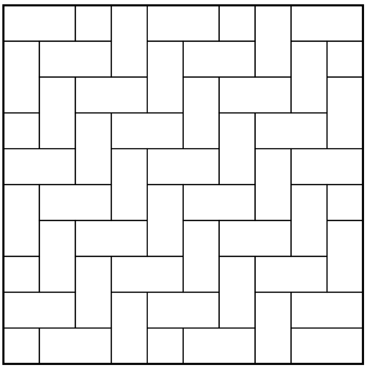
A. У Вани есть кирпичики размером 20×10 сантиметров. Их можно распиливать пополам, при этом получаются совсем маленькие кирпичики 10×10 сантиметров. Ваня хочет сложить из кирпичиков стену 50×50 сантиметров так, чтобы (а) ни один кирпичик не стоял вертикально (б) не было ни одного вертикального шва высотой более 10 см, ведь такие швы снижают прочность стены. Помогите ему это сделать.

Решение: Приведём пример такого заполнения кирпичиками:



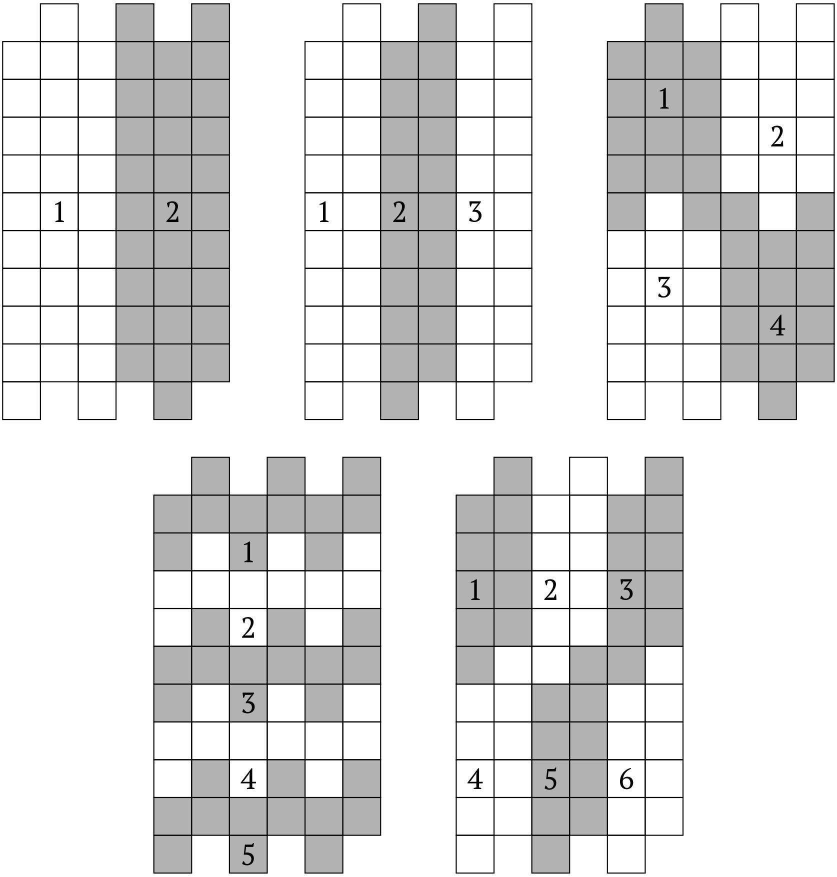
B. У Вани есть доски для паркета размером 20×10 сантиметров, их также можно распиливать пополам. Как Ване покрыть этими досками пол квадратной комнаты 1 метр $\times$ 1 метр так, чтобы не было швов длиной более 30 сантиметров ни в одном из направлений?

Решение: Приведём пример такого заполнения кирпичиками:



C. Нарисуйте на клетчатой бумаге такую фигуру (по линиям клеток), которую можно разделить по клеткам на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 одинаковых по форме и размеру связных фигур — причём в каждом из этих случаев получающиеся части не будут прямоугольниками.

Решение: Нарисуем такую фигуру и покажем, как разрезать её на 2, 3, 4, 5 и 6 частей:

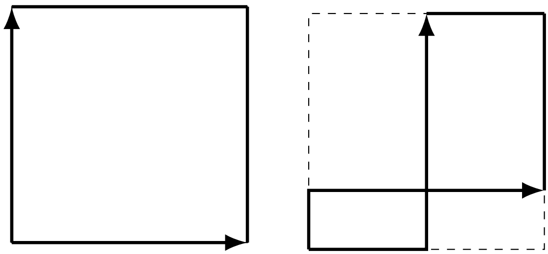


Задача 5. По сетке

Дан квадратный кусок клетчатой бумаги размером $n \times n$ клеток, вырезанный по линиям клетки. Вася соединяет левый нижний угол с правым верхним ломаной линией, идущей ровно по линиям клеток. Посчитайте количество различных ломаных линий, соединяющих эти углы, имеющих ровно:

А. один поворот;

Решение: Две линии. Из всех прямоугольных треугольников, имеющих гипотенузой линию $(0,0)$–(n,n), подходят только такие, у которых линии параллельны линиям сетки. Такой треугольник однозначно определяется направлением линии из начальной точки.



B. два поворота;

Решение: $2 \cdot (n-1)$ линий:

Заметим, что повороты могут быть только на сторонах прямоугольника: первый сегмент ломаной обязательно идёт вдоль стороны квадрата, второй сегмент — где-то в середине, третий — вдоль другой стороны квадрата. Таких линий — два набора по $n-1$: средний сегмент ломаной обязан идти по внутренним линиям клетчатой бумаги, которых $n-1$ штука.

C. k поворотов.

Решение: В условии есть ошибка: исходно предполагалось, что линия всегда должна идти в сторону увеличения координат, однако это не было сформулировано. В итоге, условие требует только, чтобы линия чередовала вертикальные и горизонтальные участки (в том числе разрешены самопересечения и многочисленные прохождения по одному и тому же месту). Это делает задачу существенно сложнее.

Будем группировать сегменты линии по парам — первый и второй, третий и четвёртый и т.п. Заметим, что все повороты в начале и середине линии могут быть в произвольных точках:

главное, чтобы сегменты имели длину больше нуля. То есть продолжение линии может иметь любой из n горизонтальных и n вертикальных вариантов (линия после пары сегментов может оказаться в любой вертикали и любой горизонтали, кроме текущих, всего же на поле $n+1$ горизонталь и вертикаль).

Однако нам надо прийти в позицию (n, n). Пусть предпоследняя пара заканчивается в точке (p, q). Если $p \neq n$ и $q \neq n$, то последняя пара предопределена единственным образом. Однако, если $p = n$ или $q = n$, последняя пара невозможна.

То есть, линия имеет $n^{\lfloor k/2 \rfloor}$ возможностей пройти по горизонталям, кроме случаев, где последняя горизонталь — n, но включая тех, где предпоследняя n, за исключением тех, где предпредпоследняя n и т.п. Для получения полного балла ещё надо грамотно учесть чётность k. Получающаяся формула слишком сложна, и авторы не ожидают, что кто-то из детей сможет привести её в законченном виде.

6 баллов ставятся за корректное решение упрощённой задачи: если ученик неправильно (упрощённо) понял условие, но решил задачу в такой формулировке. Например, вариант с постоянно увеличивающимися координатами, предполагавшийся авторами: в этом случае мы должны пройти по $\frac{k}{2}$ горизонтальным участкам и по $\frac{k}{2}$ вертикальным участкам. Горизонтальные и вертикальные участки могут быть любыми, однако начальный участок должен иметь координату 0, а конечный — координату n.

Далее разбор случаев в зависимости от чётности k. Если k нечётное, то у ломаной будет чётное количество сегментов, и если начальный — горизонтальный, то конечный — вертикальный, потому произвольно выбираем горизонтальные и вертикальные линии с 1 по $n-1$ (внутренние сегменты ломаной не могут иметь координаты 0 или n, так как иначе начальный и/или завершающий сегмент будут иметь длину 0). Кроме того, надо учесть, что начать мы можем как с горизонтального, так и с вертикального сегмента:

$$2 \cdot \left(C_{n-1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}\right)^2$$

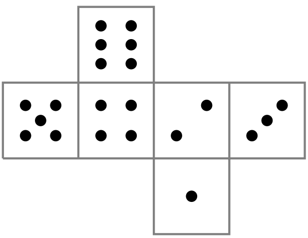
Для чётного k горизонтальных сегментов (при горизонтальном начале) будет на 1 больше, но зато два крайних фиксированы (0 и n) — потому реальный выбор $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1$ вариантов из $n-1$, а вертикальных — $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ из $n-1$, потому ответ

$$2 \cdot \left(C_{n-1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1}\right) \cdot \left(C_{n-1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}\right)$$

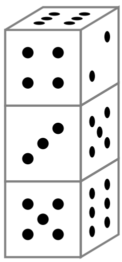
Заметим, что при $k = 1$ формула даёт 2, а при $k = 2$ даёт $2 \cdot (n - 1)$.

Задача 6. Не пизанская, но и не ханойская

Виталик бросил азартные игры, но у него всё ещё осталось много-много игральных кубиков. В свободные от работы минуты он складывает башенку из кубиков и считает количество точек на видимых гранях (всех боковых и верхней). Абсолютно все кубики в данной задаче имеют развёртку, изображённую на рисунке (a).



(a)



(b)

A. Посчитайте, сколько точек на видимых гранях башенки, изображённой на рисунке (b).

Решение: Согласно развёртке, напротив 2 лежит 5, а напротив 4 — 3. Значит, сумма видимых точек “верхнего этажа” башни равна $6+(2+5)+(4+3)=20$. Аналогично, напротив 3 лежит 4, напротив 5 лежит 2, а напротив 6 — 1. Значит, сумма видимых точек на двух "нижних этажах" равна $(3+4)+(5+2)+(5+2)+(6+1)=28$. Тогда общая сумма равна $20+28=48$.

B. Сколько видимых точек может быть на башне из 6 кубиков?

Решение: Заметим, что сумма количества точек на противоположных гранях, согласно развёртке, всегда равна 7. Действительно, 1 лежит напротив 6 и $1+6=7$, 2 лежит напротив 5 и $2+5=7$, 3 лежит напротив 4 и $3+4=7$. Теперь поймём, что видимые точки на каждом "этаже" башни — пары противоположных граней. То есть на каждом "этаже" сумма видимых точек всегда равна $7+7=14$. Значит, на шести этажах сумма видимых точек по бокам равна $6 \cdot 14=84$. Тогда общая сумма зависит лишь от того, какая грань будет на "крыше башни". Пусть там будет грань с количеством точек i, где $1 \leq i \leq 6$. Значит, общая сумма $84+i$. Важно заметить, что в этой задаче несколько вариантов ответа.

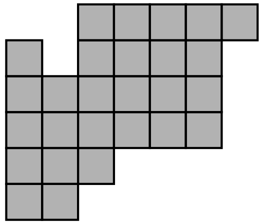
C. Какое количество точек может быть на видимых гранях башни из n кубиков? Предложите формулу для подсчёта этого количества.

Решение: Размышления полностью аналогичны предыдущему пункту. Пусть опять на верхней грани будет грань с количеством точек i, где $1 \leq i \leq 6$. На каждом из n "этажей" вновь будет по 14 видимых точек. Значит, общая сумма видимых точек будет равна $14n+i$.

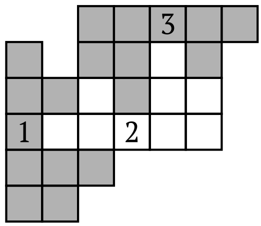
Задачи 5 класса

Задача 1. Разрезания — 1

A. Разрежьте фигуру ниже на три одинаковых по форме фигуры по линиям сетки:

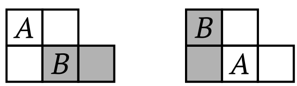


Решение: Фигуру можно разрезать так:



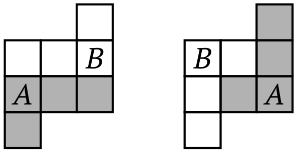
B. Можно ли нарисовать на клетчатой бумаге такие фигуры F, A, B, что F можно разрезать на A и B по линиям сетки двумя различными способами — то есть, линии разреза этих двух способов должны выглядеть по-разному? Точнее: если начертить одну из линий разреза на фигуре F, то её не получится превратить в другую линию никакой комбинацией поворотов и отражений фигуры F.

Решение: Подойдут, например, две такие фигуры:



C. Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру F, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному: если начертить одну из линий разреза на фигуре F, то её не получится превратить в другую линию никакой комбинацией поворотов и отражений фигуры?

Решение: Подойдут, например, такие фигуры:



Задача 2. Быстрое метро

Смотреть 4 класс, задачу №2.

Задача 3. Семнадцатый независимый

В четвёртом раунде семнадцатого независимого турнира исполнителей участники разбиты на пары, и песню каждого участника оценивает 15 судей. Судья ставит каждому участнику в паре от 0 до 22 баллов и отдаёт свой голос участнику, которому поставил больше баллов. Когда все 15 судей отдали свои голоса, в паре объявляется победителем тот участник, которому отдано больше голосов.

A. Может ли быть так, что победитель в паре набрал меньше баллов, чем проигравший, несмотря на перевес в голосах?

B. Могло ли случиться так, что среди восьми участников, разбитых на 4 пары, у каждого участника тем меньше баллов, чем больше он получил голосов?

Решение: *для пунктов* **A** *и* **B**

Участник	Победы	Проигрыши	Баллы	Голоса
Побед. 1	1 : 0	0 : 22	11	11
Побед. 2	2 : 0	0 : 16	20	10
Побед. 3	3 : 0	0 : 12	27	9
Побед. 4	4 : 0	0 : 9	32	8
Проигр. 4	9 : 0	0 : 4	63	7
Проигр. 3	12 : 0	0 : 3	72	6
Проигр. 2	16 : 0	0 : 2	80	5
Проигр. 1	22 : 0	0 : 1	88	4

Примеров может быть множество — этот, разумеется, далеко не единственный. Главное, чтобы пример был чётко построен и обсчитан. Можно ставить 1–2 балла за общие соображения о том, что судьи могут в одну сторону судить с маленьким перевесом, а в другую — с большим.

C. В финале семнадцатого независимого турнира встречаются два исполнителя. Для этого в полуфинале должно быть 4 участника, а в четвертьфинале — 8, ведь в каждый следующий раунд проходит ровно половина участников текущего раунда — те, кто победил в своей паре.

Но как быть, если любимый публикой исполнитель внезапно проиграл в своей паре? Давайте поможем организаторам турнира внедрить систему *спасательных кругов* — так, чтобы в следующий раунд проходили все участники, победившие в своих парах, а также наиболее любимый публикой участник, проигравший в своей паре.

Финал и полуфинал оставим без изменений, там будут участвовать 2 и 4 человека соответственно. А вот в четвертьфинале уже будет три пары участников, потому что в полуфинал пройдут три победителя в парах и один любимец публики.

В семнадцатом независимом турнире восемь парных раундов, восьмой по счёту — финал. Посчитайте, сколько исполнителей должно участвовать в каждом из них.

Решение: Пусть в некотором раунде участвует n человек. Тогда в предыдущем раунде будет участвовать $2 \cdot (n-1)$ человек: $n-1$ человек пройдут в следующий раунд как победители в своих парах, ещё одного отберёт аудитория.

Раунд	1	2	3	4	5	6	7	8
Людей	130	66	34	18	10	6	4	2

Задача 4. Селфхак

Опасливый мальчик Ваня очень переживает из-за данных в своём смартфоне. Поэтому он установил специальную программу, с помощью которой защищает графическим паролем все приложения. Графический пароль — это отмеченные в определённом порядке точки. Когда Ваня пытается отметить очередную точку, она либо остается отмеченной, что означает, что она действительно является следующей в последовательности, либо отметки сбрасываются и с этой точки, и со всех остальных. Во втором случае Ивану приходится заново отмечать все те точки, которые он уже угадал верно. Все эти точки Ваня запоминает. Когда одновременно оказываются отмечены все точки, программа даёт доступ к приложению.

Одним особенно рассеянным и сонным утром Ваня понял, что забыл пароли от всех своих приложений.

A. Первым делом Ваня открывает приложение, где смотрит смешные видео. Поскольку в этом приложении нет личных данных Вани, он защитил его паролем всего из 3 точек. Сколько точек придётся отметить Ване в худшем случае, чтобы вдоволь посмеяться над видео с котиками?

Решение: Первую точку он угадывает, в худшем случае, за 2 нажатия — не угадав дважды, он методом исключения точно поймёт, на что нужно нажать. Вторую точку он угадывает со второго раза, но для каждой попытки нужно по 2 нажатия. Сразу после этого он методом исключения находит третью кнопку и может нажать всю комбинацию сразу. Тогда ему понадобится $1 + 1 + 2 + 3 = 7$ нажатий.

B. Автор одного из видео предложил Ване подписаться на его канал в популярном и безопасном мессенджере. Ваня, разумеется, бросился подписываться, но чтобы сделать это, ему необходимо вспомнить последовательность из 10 точек. Сколько нажатий на точки ему придётся сделать в худшем случае?

Решение: По аналогии с предыдущим пунктом, в самом худшем случае он переберёт 9 кнопок, и лишь методом исключения найдёт нужную. Далее он будет нажимать по 2 кнопки и в худшем случае найдёт правильную только после 8 неудачных попыток. Продолжая данную логику, мы придём к формуле для общего количества попыток:

$$\begin{aligned} 1\cdot(10-1) &+ 2\cdot(10-2) &+& 3\cdot(10-3) &+& 4\cdot(10-4)+ \\ 5\cdot(10-5) &+ 6\cdot(10-6) &+& 7\cdot(10-7) &+& 8\cdot(10-8)+ \\ 9\cdot(10-9) &= 165. \end{aligned}$$

После 165 нажатий Ваня точно будет знать комбинацию, и ему останется только набрать её, потратив ещё 10 попыток. Итого, ему понадобится $165+10=175$ попыток.

С. Потратив несколько часов, Ваня всё же открыл мессенджер. Уставшему мальчику надоело такое положение дел, и он решил удалить программу, устанавливающую пароли. Однако в самый последний момент он вдруг захотел вычислить, сколько точек ему пришлось бы отметить, если бы пароль состоял из n символов. Помогите пытливому юноше вычислить количество отмеченных точек в худшем случае.

Решение: Перенесём размышления из предыдущего пункта. Первую кнопку Ваня, в худшем случае, найдёт методом исключения за $n-1$ нажатие. Поиск второй потребует не более $2\cdot(n-2)$ нажатий… Таким образом, мы придём к формуле:

$$1\cdot(n-1)+2\cdot(n-2)+\ldots+(n-2)\cdot 2+(n-1)\cdot 1+n=$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i\cdot(n-i)+n=\sum_{i=1}^{n-1}(i\cdot n-i\cdot i)+n=n\cdot\sum_{i=1}^{n-1} i-\sum_{i=1}^{n-1} i^2+n=$$

$$n\cdot\frac{(n-1)\cdot(n-1+1)}{2}-\frac{(n-1)\cdot(n-1+1)\cdot(2\cdot(n-1)+1)}{6}+n=$$

$$\frac{(n-1)\cdot n^2}{2}-\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}+n=$$

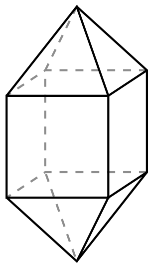
$$\frac{(n-1)\cdot n\cdot(3n-(2n-1))}{6}+n=\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{6}+n$$

Задача 5. Шутка

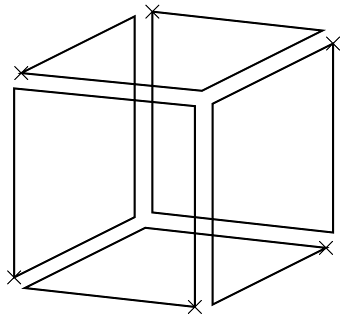
Смотреть 4 класс, задачу №3.

Задача 6. Не пользуясь телепортацией

A. Рассмотрим многогранник, представляющий из себя куб, на верхнюю и нижнюю стороны которого приклеили по четырёхсторонней пирамиде (смотреть рисунок (a)). Предложите жуку Евгению способ проползти по всем рёбрам этого многогранника, по каждому — ровно один раз, не прерываясь и не пользуясь телепортацией.



(a)



(b)

Решение: Проверять пример.

B. Перед жуком Евгением находится куб. Предложите жуку Евгению способ проползти по каждому ребру куба ровно по два раза (не прерываясь и не пользуясь телепортацией) так, чтобы рёбра, по которым ползёт Евгений, можно было разбить на восемь групп по три подряд идущих ребра, и три ребра в одной группе лежали бы на одной грани куба.

Решение: Пример на рисунке (b). Крестиками отмечены границы групп из трёх рёбер.

C. На тетрадном листе отметили несколько точек; потом некоторые из них соединили линиями, линии не пересекаются. Известно, что жук Евгений может доползти по нарисованным линиям от любой выбранной точки до любой другой. Затем каждую из линий удвоили, нарисовав рядом с ней ещё одну линию, соединяющую те же самые точки из числа отмеченных. Докажите, что жук Евгений теперь может проползти по всем нарисованным линиям целиком, по каждой — ровно один раз, не прерываясь и не пользуясь телепортацией.

Решение: После того, как каждую из линий удвоили, степень каждой вершины стала чётной — такой граф удовлетворяет условию теоремы об Эйлеровом цикле. Можно явно предъявить обход — поиском в глубину по рёбрам. Фразы «теперь рёбер стало чётное число» или «по каждому ребру сначала туда, потом обратно» решением не являются, за них ставится 0 баллов.

Задачи 6 класса

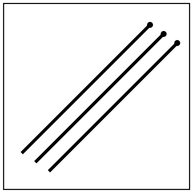
Задача 1. Разделяй и властвуй

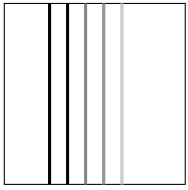
A. Как уложить n спичек длины 4.1 см в квадрат со стороной 4 см, чтобы после этого квадрат остался состоящим из одной линейно связной области: то есть, между любыми двумя незанятыми точками внутри квадрата можно было бы провести линию, не касаясь спичек и сторон?

Решение: Например, уложить их под углом с шагом $\frac{1}{n}$ сантиметров: смотреть рисунок ниже.

B. На какое наибольшее число областей можно разделить квадрат со стороной 4 см с помощью n спичек длины 4 см? Спички могут касаться друг друга, но не могут пересекаться. Для простоты будем считать, что спички не имеют ширины.

Решение: Покажем, что можно разделить на $n+1$ область, для этого уложим спички вертикально:





Однако обоснование максимальности данного решения может потребовать некоторого усилия.

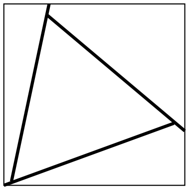
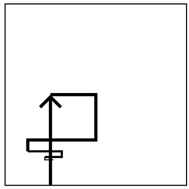
Формальное доказательство может предполагать, например, использование формулы Эйлера. Мы можем представить квадрат с уложенными в нём спичками некоторым планарным графом. Вершинами здесь будут все пересечения и касания спичек; при необходимости нам придётся разделять спички на 2 и более частей. Границы квадрата также будем считать четырьмя спичками, уложенными вокруг исходной фигуры.

По формуле Эйлера $\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2$. Предположим, что у нас нет «висящих» спичек, концы которых не касаются никаких других спичек или границ. Посчитаем, сколько всего вершин: $4 + 2 \cdot n$ (по две вершины на спичку и четыре вершины на границы). Сколько всего рёбер: $P \leq 4 + n + 2 \cdot n$ (четыре границы, n спичек, и каждый конец спички либо касается другого конца спички, либо дополнительно разделяет спичку или границу на две части, то есть прибавляет одно ребро — отсюда неравенство). Тогда количество областей («граней») будет ограничено сверху так:

$$\Gamma \leq 2 - (4 + 2 \cdot n) + (4 + n + 2 \cdot n) = n + 2$$

Итого, в самом лучшем случае (все концы спичек разделяют какие-то другие спички или границы) плоскость разделится на $n + 2$ областей, то есть собственно квадрат разделится на $n + 1$ область. Таким образом, эталонное решение, приведённое выше — наилучшее.

Есть большое искушение доказывать это утверждение, опираясь на наглядные геометрические соображения. Например заметить, что каждая спичка в эталонном решении разделяет область на две части — и, обобщив это на любую раскладку, получить $n + 1$ область в итоге. Но тут легко допустить ошибку: например, на следующей картинке каждая спичка разделяет область на три части.

C. Чёрный кот Васька — большой поклонник здорового кошачьего образа жизни: по совету врачей он спит по 16 часов в сутки и не бегает за раз более 20 метров. Рядом с его любимым лежбищем находится квадратная игровая площадка размером 10 на 10 метров, на которой шумная публика мешает ему выполнять предписания врачей.

Васька решил для уменьшения активности публики воспользоваться её суеверием — пробежаться по площадке и разбить её на некоторое количество областей своим следом. На какое максимальное количество областей у Васьки получится разбить площадку за одну пробежку?

Решение: Васька может разделить площадку на сколь угодно большое количество областей. Траектория Васьки может быть, например, как на рисунке выше: бежим прямо, а потом назад, петлями многократно пересекая свой след.

Здесь прямое движение (вверх) идёт на 5 метров, обратное движение требует не более 15 метров: каждая петля в три раза длиннее соответствующего прямого участка. Понятно, что петель можно сделать столько, сколько потребуется.

Если перейти к пределу, то кот сможет сделать бесконечное количество петель, но упоминание этого факта не влияет на оценку за задачу.

Задача 2. Опубликовать за 60 секунд

«Я хочу перевернуть ваше представление о математике!»

Научные руководители Илья и Руслан соревнуются в выдумывании тем для научных работ для своих учеников. У каждого из них изначально есть некоторое количество придуманных заранее тем. Собравшись вместе, они ищут новые темы, причём не как угодно, а в следующем порядке:

- Один из них придумывает 1 новую тему;
- После этого кто-то из них придумывает 2 новых темы;
- После этого кто-то из них придумывает 3 новых темы;
- ...

Перед n–ым шагом описанной нами последовательности руководители договариваются о том, кто именно из них сейчас придумывает n новых тем.

Когда оказывается, что Руслан и Илья придумали равное количество работ, они становятся довольными и прекращают искать новые темы.

A. Пусть изначально Илья придумал 14 тем для научных работ, а Руслан — только 2. Как нужно действовать научным руководителям, чтобы как можно быстрее сравнять количество придуманных работ?

Решение: Для начала поймём, какое минимальное количество шагов может быть в этом случае. Разница в количестве придуманных тем — 12. Значит, в нашей последовательности не менее 5 шагов (т.к. $1 + 2 + 3 + 4 = 10 < 12$). Теперь заметим, что последовательности в 5 и 6 шагов дают нам нечётные суммы придуманных работ — 15 и 21 соответственно — а нам нужно компенсировать чётный разрыв в 12 тем. Значит, нам понадобится не менее 7 шагов. Приведём пример, когда 7 шагов будет достаточно. Пусть Илья выполнит только первый и сельмой шаги последовательности, а Руслан — все остальные. Тогда количество придуманных работ станет $14 + 1 + 7 = 22$ у Ильи и $2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 22$ у Руслана.

B. Пусть изначально Илья придумал на n тем для научных работ больше, чем Руслан. Докажите, что руководители всегда смогут сравнять количество придуманных ими тем, придумывая новые в той последовательности, которая описана выше.

Решение: Достаточно просто придумать последовательность шагов, после которой разрыв сокращается на 1. Тогда, применяя эту последовательность, мы можем сократить разрыв с n до нуля. Для этого разобьём шаги последовательности на пары, начиная с начала, и попросим Илью выполнять первый шаг из каждой пары, а Руслана — второй. Таким образом, количество работ, придуманных Ильёй, будет увеличиваться на некоторое i, а придуманных Русланом — на $i+1$ после каждой пары таких шагов. То есть разрыв будет сокращаться на 1.

C. Попробуйте найти количество шагов последовательности, которое необходимо пройти для того, чтобы сравнять количество придуманных тем, если изначально Илья придумал на n тем больше, чем Руслан. Какого количества шагов, в зависимости от n, гарантированно хватит? Могут ли Илья и Руслан договориться таким образом, чтобы сократить количество шагов? Если да, то до скольки они смогут сократить его?

Решение: Оценим количество шагов **алгоритма из решения предыдущего пункта**. Разрыв в количестве придуманных статей составляет n, а на каждом шаге мы сокращаем этот разрыв на 1. Значит, нам достаточно будет сделать $2n$ шагов, чтобы сравнять количество работ.

Попробуем теперь уменьшить количество шагов, модифицировав алгоритм. Для этого посмотрим, сколько последовательных шагов, начиная с первого, может сделать Руслан, чтобы сократить разрыв. Иными словами, найдём максимальное k, такое что

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2} \le n.$$

Достаточно сказать, что такое k всегда найдётся, но если угодно, то решив последнее неравенство, k можно выразить через n так: $k = \left\lfloor \frac{\sqrt{1+8n}-1}{2} \right\rfloor$, где $\lfloor\ \rfloor$ — округление в меньшую сторону. После того, как Руслан сделает эти шаги, разрыв сократится до

$$n - \frac{\left\lfloor \frac{\sqrt{1+8n}-1}{2} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{\sqrt{1+8n}-1}{2} \right\rfloor + 1 \right)}{2}.$$

А любой разрыв мы, по предыдущему пункту, умеем сокращать за количество шагов, вдвое большее размера разрыва. Таким образом, мы уменьшили количество с $2n$ до

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{1+8n}-1}{2} \right\rfloor + 2 \cdot \left(n - \frac{\left\lfloor \frac{\sqrt{1+8n}-1}{2} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{\sqrt{1+8n}-1}{2} \right\rfloor + 1 \right)}{2} \right) \approx 2\sqrt{2n}$$

шагов.

N.B.: Важно понимать, что нам интересно не то, угадал ли ребёнок наш алгоритм или его модификацию, а то, умеет ли он придумывать свой и примерно считать для него количество шагов!

Задача 3. Лифт

Компания «Дешёвые лифты» удешевляет свою продукцию в частности тем, что не ставит двери на некоторых этажах. Например, их стандартное решение — установить двери только на чётных этажах: при этом жителям нечётных этажей придётся проходить один этаж пешком. А в среднем жители при поездке на лифте будут проходить половину этажа пешком (мы предполагаем, что на каждом этаже живёт одинаковое количество жителей).

А. Рассмотрим самый дешёвый лифт в линейке: с дверями только на двух этажах. На каких этажах в 24-этажном доме следует установить эти двери, чтобы сделать среднее количество проходимых жителями этажей минимальным?

Решение: Сперва предполжим, что первая дверь стоит на первом этаже.

Итак, всего у пассажира может быть четыре варианта поведения:

1. Подняться на свой этаж пешком.
2. Воспользоваться лифтом, спуститься до своего этажа

3. Воспользоваться лифтом — этаж пассажира совпадает с этажом лифта (везунчик!)
4. Воспользоваться лифтом и подняться дальше.

Пусть вторая дверь находится на этаже n, а пассажиру нужно на этаж k.

Понятно, что стратегия 1 всегда проигрывает стратегии 3 и 4 (если они применимы), и проигрывает стратегии 2, если спускаться нужно на меньшее количество этажей: если $k < \frac{n}{2}$.

Поэтому оптимальное количество этажей, которое нужно пройти пассажиру — это кусочно-линейная функция: она растёт от 0 для этажа 1 до $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor - 1$ для этажа $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, затем снова уменьшается до 0 на этаже n, а затем растёт до 24 этажа. Среднее же количество этажей — это сумма всех значений данной функции, поделённое на 24.

Запишем это в виде формулы:

$$0 + 1 + \cdots + \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + \cdots + 1 + 0 + 1 + \cdots + (24 - n)$$

И выпишем сумму:

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot \frac{n\cdot(n-1)}{2} + \frac{(24-n)\cdot(23-n)}{2} & \text{при нечётном } n \\ \frac{n\cdot(n-1)}{2} + \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2} + \frac{(24-n)\cdot(23-n)}{2} & \text{при чётном } n \end{array}$$

В принципе, дальше можно решать квадратное уравнение, но достаточно заметить, что при увеличении длины участка пешего подъёма средняя длина подъёма растёт квадратично. Поэтому минимум функции достигается при одинаковых длинах трёх участков подъёма/спуска. Точного равенства не достичь (из-за делимости), но ближе всего равенство достигается при $n = 16$ и $n = 17$:

Участок	$n = 16$	$n = 17$
первый	с 2 по 8 этаж	с 2 по 8 этаж
второй	с 9 по 15 этаж	с 9 по 16 этаж
третий	с 17 по 24 этаж	с 18 по 24 этаж

Заметим, что если предполагать, что нижняя дверь лифта находится на этаже выше первого, то такое положение двери не даст никакого улучшения ситуации: так мы только увеличим длины 2 и 3 участков, не уменьшив длину первого.

Как нетрудно видеть, в обоих случаях будет два участка подъёма/спуска на 7 этажей и один участок на 8 этажей. Любой ответ ($n = 16$ и $n = 17$) является правильным, за подробный разбор с упоминанием обоих вариантов добавляется 1 балл, за разбор ситуации с нижней дверью добавляется ещё 1 балл.

B. Рассмотрим лифт с дверями на трёх этажах 24-этажного дома. На каких этажах следует установить эти двери, чтобы сделать среднее количество проходимых жителями этажей минимальным?

Решение: Анализируя ситуацию аналогично пункту А, приходим к выводу, что нам надо разделить дом на 5 как можно более одинаковых участков, при этом жители 1 этажа и промежутков между парами участков 2, 3 и 4, 5 лестницами не будут пользоваться совсем. Поэтому суммарная длина участков $24 - 1 - 2 = 21$, и длины участков будут 4, 4, 4, 4 и 5 этажей. Для достижения этих длин двери можно расставить, например, на этажах 1, 10 и 19.

C. Рассмотрим лифт в n-этажном доме с дверями на k этажах. На каких этажах их следует установить, чтобы среднее количество проходимых этажей было минимальным?

Решение: Обобщая рассуждения предыдущих пунктов, приходим к выводу, что все этажи дома без лифта (которых $n - k$) нужно разделить на $n - 2 \cdot k + 1$ участков по возможности одинаковой длины. Рассмотрим последовательность a_i — это последовательность длин участков с так расставленными округлениями, чтобы суммарная длина участков была равна $n - k$ (знаком % обозначим остаток от деления):

$$a_i = \begin{cases} \lceil \frac{n-k}{n-2\cdot k+1} \rceil, & \text{если } i \leq (n-k)\%(n-2\cdot k+1) \\ \lfloor \frac{n-k}{n-2\cdot k+1} \rfloor, & \text{иначе} \end{cases}$$

Соответственно, первая дверь будет на этаже 1, остальные двери с номером $i > 1$ — на этажах вида

$$1 + \sum_{t=1}^{i}(a_{2\cdot t-3} + a_{2\cdot t-2} + 1).$$

Задача 4. Сортировка — 1

Выпишем все числа от одного до десяти — но не в привычном порядке возрастания, а в алфавитном порядке: восемь, два, девять, десять, один, пять, семь, три, четыре, шесть. В этой задаче вам предлагается исследовать порядок, в котором будут стоять числа некоторого множества, если их отсортировать по алфавиту.

A. Числа от 1 до 100 выписали в алфавитном порядке. Какое число стоит на пятом месте?

Решение: Выпишем первые числа: 18, 8, 80, 88, 82, 89. Пятое число — 82.

B. Числа от 1 до 10'000'000'000 (десять миллиардов) выписали в алфавитном порядке. Перечислите первые десять из них.

Решение: (1) 18 (2) 18 миллионов (3) 18 миллионов 18 (4) 18 миллионов 18 тысяч (5) 18 миллионов 18 тысяч 18 (6) ...восемь (7) ...восемьдесят (8) ...88 (9) ...82 (10) ...89.

C. Числа от 1 до N выписали в алфавитном порядке. Какое число, в зависимости от N, будет последним?

Решение: Числа до 666 рассматриваются отдельно. Сначала последним будет 6, потом 60, потом 600, 606. После 666 последним будет число, состоящее из шестёрок — их количество должно быть кратно трём. Какое именно это будет число? Такое, что старшая степень десятки в нём (666 миллиардов…, 666 миллионов…) будет последней по алфавиту.

Задача 5. Пульт от кондиционера

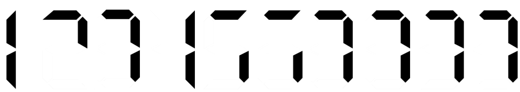
Пульт задаёт кондиционеру один из десяти заранее подобранных режимов. Эти режимы пронумерованы числами от 0 до 9. На пульте есть маленький семисегментный экран, который показывает цифру — номер выбранного режима. Цифры на этом экране выглядят так:

На пульте есть две кнопки: «предыдущий режим» и «следующий режим», с помощью которых осуществляется переключение. В частности, следующий режим за девятым — это нулевой.

Неожиданно некоторые из семи сегментов на экране сломались и перестали зажигаться. Хозяину пульта это очень не нравится, но он всё равно хочет научиться определять, какой режим сейчас выбран, например, посмотрев, какие сегменты горят сейчас, а какие будут гореть, если попереключаться на соседние режимы. На основании этого (хозяин очень надеется) можно будет сделать выводы о выбранном режиме.

A. Пусть известно, что работают только сегменты, образующие цифру 7. Сколько переключений тогда нужно, чтобы гарантированно определить режим, в котором находится пульт?

Решение: Посмотрим, что остаётся от цифр, если включаются только сегменты, образующие цифру 7:



Цифры 5, 6 выглядят одинаково, 1, 4 выглядят одинаково, а также цифры 3, 7, 8, 9, 0. Числа в парах 5, 6 и 1, 4 можно отличить друг от друга одним переключением вперёд. 3 отличается от 7, 8, 9, 0 одним переключением назад.

Теперь заметим, что никакими двумя переключениями 7, 8, 9, 0 различить между собой не получится. Потому что, например, если это переключения назад — 9 и 0 будут вести себя одинаково. А вот тремя переключениями назад эти цифры различить уже можно. Ответ — три переключения.

B. Пусть мы не знаем доподлинно, какие сегменты работают, какие нет. Докажите, что всё равно за несколько нажатий можно точно определить режим пульта.

Решение: Первым делом сделаем десять переключений режима вперёд — за эти переключения мы найдём как минимум один работающий сегмент. Выпишем, какие сегменты на каких числах включаются:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
th		×	×		×	×	×	×	×	×
mh		×	×	×	×	×		×	×	
bh		×	×		×	×		×	×	×
ul				×	×	×		×	×	×
ur	×	×	×	×			×	×	×	×
bl		×				×		×		×
br	×		×	×	×	×	×	×	×	×

Заметим, что, какой сегмент ни возьми, смотря только на него, всегда можно определить, в каком месте цикла мы находимся, потому что нет, скажем, последовательности включенных и не включенных состояний длины 5, повторяющейся дважды.

C. Приведите пример такого числа $1 < k < 10$ и такой комбинации неработающих сегментов на экране, что на пульте с k режимами (от 0 до $k-1$) с данными работающими сегментами нельзя будет однозначно определить режим пульта.

Решение: Пусть $k = 6$ и работают только верхний и нижний горизонтальные сегменты. Тогда 1, 2, 3 никак не отличить от 4, 5, 6.

Задача 6. Отражённые объекты интереснее, чем кажутся

Серёжа постоянно носит с собой старый калькулятор, на котором периодически что-то считает. Цифры на калькуляторе выглядят так:

A. Однажды Серёжа положил калькулятор рядом с зеркалом, прислонив к зеркалу правый край его экрана. Серёжа заметил, что отражение некоторых чисел в зеркале тоже можно прочитать как (возможно, другое) число. Например, из 281 получается 185. Можно ли прочитать отражение чисел:

$$180; \qquad 205; \qquad 12851; \qquad 369; \qquad 31813?$$

Решение: Поймём, куда переходят цифры при отражении по вертикали:

$$1 \to 1, \qquad 2 \to 5, \qquad 3 \to ?, \qquad 4 \to ?, \qquad 5 \to 2,$$
$$6 \to ?, \qquad 7 \to ?, \qquad 8 \to 8, \qquad 9 \to ?, \qquad 0 \to 0.$$

Посмотрим, куда перейдут числа:

$$180 \to 081; \qquad 205 \to 205; \qquad 12851 \to 12851;$$
$$369 \to ???; \qquad 31813 \to ?181?.$$

B. Может ли Серёжа придумать и ввести в калькулятор такое число a, которое после отражения читается как число b, причём $a - b = 564241$?

Решение: Заметим, что все цифры, которые читаются после отражения, имеют тот же остаток при делении на 3, что и до отражения: $1 \equiv_3 1, 2 \equiv_3 5, 3 \equiv_3 3, 5 \equiv_3 2, 8 \equiv_3 8, 0 \equiv_3 0$. Значит, по свойствам деления на 3, числа, составленные из этих цифр, тоже не изменят своего остатка по модулю 3, то есть $a \equiv_3 b$. Но тогда $a - b \equiv_3 0$, то есть разность этих чисел должна делиться на 3. Однако число 564241 не делится на 3 (потому что сумма цифр $5 + 6 + 4 + 2 + 4 + 1 = 22 \not\equiv_3 0$). Значит, такое число a найти невозможно.

C. Теперь Серёжа хочет ввести число a, а потом перевернуть калькулятор на 180 градусов, прислонить правый край уже перевёрнутого калькулятора к зеркалу и в отражении экрана прочитать — перевёрнутое и отражённое — число b. Может ли $a - b$ быть равно 241225?

Решение: Вновь поймём, как изменятся цифры после переворота и отражения (после каждой стрелки указан результат соответствующего преобразования: сначала переворот, потом отражение):

$$1 \to 1 \to 1, \quad 2 \to 2 \to 5, \quad 3 \to ? \to 3, \quad 4 \to ? \to ?, \quad 5 \to 5 \to 2,$$
$$6 \to 9 \to ?, \quad 7 \to ? \to ?, \quad 8 \to 8 \to 8, \quad 9 \to 6 \to ?, \quad 0 \to 0 \to 0.$$

Как и в прошлом пункте, числа, составленные из цифр, выдерживающих такие преобразования, тоже имеют такой же остаток от деления на 3, что и числа до преобразований. Значит, $a - b \equiv_3 0$, то есть разность этих чисел должна делиться на 3. Однако число 241225 не делится на 3 (потому что сумма цифр $2 + 4 + 1 + 2 + 2 + 5 = 16 \not\equiv_3 0$). Значит, такое число a опять найти невозможно.

Задача 7. Шутка

Смотреть 4 класс, задачу №3.

Задача 8. Снежинки

Снежная Королева дрессирует снежинки. Начертив на бесконечном замёрзшем озере бесконечную числовую прямую, она гоняет снежинки по этой прямой. Правила перегона таковы:

- она может без затраты магической энергии переместить каждую снежинку на два шага влево или вправо (то есть из точки с координатой x снежинка попадает по выбору Королевы в точку с координатой $x-2$ или $x+2$);
- чтобы сдвинуть снежинку в соседнюю точку (то есть из точки с координатой x снежинка попадает в $x-1$ или $x+1$), Королеве нужно потратить 1 очко магической энергии;
- снежинки могут оказываться в одной точке, но перемещаться оттуда они будут по отдельности.

В каждом пункте Вам предлагается выяснить, какое минимальное количество очков магической энергии может потратить Королева, чтобя собрать все снежинки в какой-то одной точке.

A. Пусть снежинки лежат на числовой прямой в точках с координатами 1, 4, 8, 9 и 13. Какое наименьшее количество магической энергии нужно потратить Королеве, чтобы собрать их в какой-либо одной точке (не обязательно с нулевой координатой)?

Решение: Основной идеей всей задачи является факт того, что Королева может без затрат магической энергии собрать все снежинки в точке с координатой такой же чётности, что и изначальные координаты снежинок. То есть "бесплатно" можно перегнать все снежинки с 1, 9 и 13 в точку с координатой 1, а с 4 и 8 — в точку с координатой 0. Теперь остаётся лишь понять, что перенести две снежинки из 0 в 1 дешевле, чем перегонять три снежинки из 1 в 0. И потребуется для этого два очка магической энергии (по одному очку на каждую снежинку).

B. Пусть теперь у Королевы есть n снежинок, которые расположены на прямой в точках с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Сколько магической энергии нужно потратить, чтобы собрать их в одной точке?

Решение: Обозначим количество точек с чётными координатами за e_x, а с нечётными — за o_x. Тогда, опять же, все e_x точек с чётными координатами можно без затраты магической энергии переместить в точку с координатой 0, а все o_x точек с нечётными — в точку с координатой 1. Дальше нужно просто сравнить e_x и o_x, чтобы понять, куда дешевле перенести все точки: в 0 или в 1. Значит, при оптимальном перемещении нам понадобится $\min(e_x, o_x)$ очков магической энергии.

C. Научившись перемещать снежинки по прямой, Королева подняла все снежинки в воздух. Теперь положение каждой из n снежинок можно задать тремя координатами: (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$. Без затрат энергии Королева может изменить на 2 любую из координат снежинки, а изменение любой координаты на 1 всё так же стоит 1 очко. Сколько энергии на этот раз понадобится Королеве при оптимальном перемещении, чтобы собрать все снежинки в какой-то одной точке пространства? Как близко может быть эта точка к Королеве, которая стоит в точке $(0, 0, 0)$?

Решение: Обозначим количества точек с чётной и нечётной первой координатой за e_x и o_x соответственно. Аналогично введём обозначения e_y, o_y, e_z и o_z для второй и третьей координат. По алгоритму из предыдущего пункта, мы можем собрать все снежинки в одной плоскости в точках с координатами $(x_i, y_i, 0)$ (при $e_z \geq o_z$) или $(x_i, y_i, 1)$ (при $e_z < o_z$) для всех $i = 1, \ldots, n$. Чтобы сделать это, нам понадобится $\min(e_z, o_z)$ очков магической энергии. Аналогичным образом мы дальше собираем все снежинки на одной прямой за $\min(e_y, o_y)$ и, наконец, в одной точке за $\min(e_x, o_x)$ очков магической энергии соотвтетственно. Значит, всего нам понадобится $\min(e_z, o_z) + \min(e_y, o_y) + \min(e_x, o_x)$ очков магической энергии.

Задачи 7 класса

Задача 1. Разрезания — 1

Смотреть 5 класс, задачу №1.

Задача 2. Мелочь, а неприятно

A. Девочка Лиана очень не любит чеканные монеты и песни про них. Поэтому она носит в кармане бумажник с бесконечным количеством десятиврублёвых купюр и ровно одной монеткой достоинством 8 врублей. Лиана идёт в магазин, где хочет избавиться от монеты, а заодно купить какое-то количество мячей для жонглирования, каждый из которых стоит 12 врублей. Какое минимальное количество мячей нужно купить Лиане, если она хочет получить сдачу без монет?

Решение: Нужно купить 4 мяча: $12 \cdot 4 = 48 = 4 \cdot 10 + 8$. 4 — минимальное подходящее число, в этом просто убедиться перебором.

B. Пусть монетка в кармане Лианы будет достоинством r врублей, где r от 1 до 10, а один мяч для жонглирования стоит k врублей. Сколько мячей нужно купить Лиане, чтобы получить сдачу без монет, если r и k — чётные числа?

Решение: Нетрудно понять, что нам просто нужно найти минимальное число m такое, чтобы $m \cdot k \equiv_{10} r$, то есть чтобы число $m \cdot k$ в десятичной записи заканчивалось цифрой r. Так как нас будет интересовать только последняя цифра числа $m \cdot k$, на которую влияет лишь последяя цифра числа k, будем рассматривать только её, обозначив её за k_0. Перебором можно найти минимальное m для любой пары r и k_0 или доказать, что такого m подобрать нельзя. Минимальные m для разных r и k_0 приведены в таблице ниже:

$r \backslash k_0$	0	2	4	6	8
2	-	1	3	2	4
4	-	2	1	4	3
6	-	3	4	1	2
8	-	4	2	3	1

C. Пусть монетка в кармане Лианы будет достоинством r ($r < 10$)

врублей, а один мяч для жонглирования стоит k врублей. Сколько мячей нужно купить Лиане, чтобы получить сдачу без монет?

Решение: Как и в прошлом пункте, нас будет интересовать лишь последяя цифра числа k, будем рассматривать только её, вновь обозначив её за k_0. Переберём пары r и k_0 и найдём для них минимальные m:

$r \backslash k_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-	1	-	7	-	-	-	3	-	9
2	-	2	1	4	3	-	2	6	4	8
3	-	3	-	1	-	-	-	9	-	7
4	-	4	2	8	1	-	4	2	3	6
5	-	5	-	5	-	1	-	5	-	5
6	-	6	3	2	4	-	1	8	2	4
7	-	7	-	9	-	-	-	1	-	3
8	-	8	4	6	2	-	3	4	1	2
9	-	9	-	3	-	-	-	7	-	1

Задача 3. Семнадцатый независимый

Смотреть 5 класс, задачу №3.

Задача 4. Пульт от кондиционера

Смотреть 6 класс, задачу №5.

Задача 5. Сумма простых — простое?

Натуральное число называется простым, если оно имеет *ровно два* натуральных делителя — себя и единицу.

А. Можно ли взять шесть различных простых чисел так, чтобы сумма любых трёх из них была простым числом?

Решение: Нельзя. Рассмотрим остатки от деления простых чисел на 3. Только одно простое число может давать в остатке 0, остальные пять чисел будут давать остатки либо 1, либо 2. Среди этих пяти найдутся три числа, имеющие одинаковые остатки, и сумма этих трёх чисел будет делиться на 3.

B. Найдите наибольшее натуральное число n такое, что существует набор из n различных простых чисел, сумма любых трёх чисел из которого является простым числом.

Решение: Покажем, что $n \leqslant 4$. Допустим $n = 5$. Рассмотрим остатки при делении на 3 этих чисел. Если среди этих чисел будут три числа, имеющие одинаковые остатки, то сумма этих трёх чисел будет делиться на 3. Только одно простое число кратно трём. Значит, среди этих пяти чисел есть два числа, дающие остаток 1, и два числа, дающие остаток 2. Но если сложить число, дающее остаток 1, число, дающее остаток 2, и число, дающее остаток 0, то сумма этих чисел будет кратна 3. Противоречие.

Понятно, что $n \leqslant 4$. Покажем, что $n = 4$. Рассмотрим числа 5, 7, 17 и 19. $7 + 17 + 19 = 43$, $5 + 17 + 19 = 41$, $5 + 7 + 19 = 31$, $5 + 7 + 17 = 29$. Все суммы являются простыми числами.

C. Обозначим через M_k ($k \geqslant 3$) множество, состоящее из k различных простых чисел, сумма любых трёх из которых — простое число. В прошлых пунктах мы просили вас установить, при каких k множество M_k существует. Через S_k обозначим сумму элементов множества M_k. Найдите наименьшее возможное значение S_k (для всех возможных k).

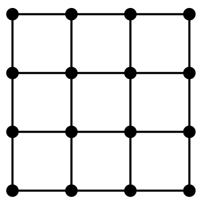
Решение: Из предыдущих пунктов следует, что k равно 3 или 4. Рассмотрим оба варианта. Пусть $k = 3$. Покажем, что число 2 не входит в M_3. Допустим входит, но тогда сумма трёх простых чисел, включающих 2, будет чётной, то есть не простой. Противоречие. Рассмотрим множество $M_3 = \{3, 5, 11\}$, для него $S_3 = 19$. Понятно, что сумму меньше 19 для $k = 3$ получить невозможно. Однако для $k = 4$ можно рассмотреть множество $M_4 = \{2, 3, 5, 7\}$, для которого $S_4 = 17$. И эту сумму уменьшить никак не получится, потому что 2, 3, 5 и 7 — наименьшая из возможных четвёрка простых чисел.

Задача 6. Игры с котиком

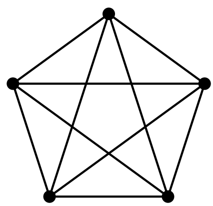
Как известно, если на плоскости нарисовать многоугольник, то в нём спустя какое-то время материализуется котик.

Пусть на плоскости нарисован граф, его рёбра могут пересекаться между собой. Его изображение делит плоскость на n ограниченных областей и одну неограниченную. В одной из ограниченных областей материализовался котик. Маша и Лера играют в следующую игру: они по очереди (Маша ходит первой) стирают по одному ребру графа. При этом некоторые области объединяются между собой. Если после хода одной из девочек котик оказывается в неограниченной области, она проиграла.

A. Кто из девочек выиграет при правильной игре, если граф представляет из себя клетчатый квадрат 3×3 (смотреть рисунок a), а котик материализовался в центральной клетке?



(a)



(b)

Решение: Выигрывает Лера, она должна делать ходы, симметричные машиным относительно центра клетчатого квадрата. Действительно, если у Маши есть ход, то и у Леры он будет.

B. Пусть граф представляет из себя клетчатый квадрат 3×3. В зависимости от того, в какой клетке изначально материализуется котик, кто из девочек выиграет при правильной игре?

Решение: Победит Лера. В клетчатом квадрате 3×3 есть 24 ребра. После ходов Леры и Маши количество рёбер уменьшается на 2. Заметим, что котик ограничен чётным количеством рёбер. Значит, тот кто его выпустит, после себя оставит нечётное количество рёбер, а это может быть только Маша. Предъявим стратегию Леры. Лера не должна стирать границы множества, ограничивающего котика, но при этом она может расширять это множество.

C. Кто выиграет при правильной игре, если граф из себя представляет правильный пятиугольник, в котором попарно соединены все вершины (смотреть рисунок b), а котик находится во внутреннем пятиугольнике?

Решение: Выигрывает Лера. Изначально котик сидит в пятиугольнике. Задача Леры состоит в том, чтобы, область, ограничивающая котика имела чётное число сторон. А задача Маши, чтобы область имела нечётное число сторон. Не сложно проверить, что Лере это удастся сделать, убирая внутренние диагонали.

Задача 7. Зелёная волна

Никита ходит со скоростью ровно 2 м/с, а бегает со скоростью 5 м/с. Он умеет моментально производить в голове арифметические вычисления любой сложности. Если Никита подходит к перекрёстку и при этом горит зелёный сигнал светофора, Никита моментально переходит дорогу, не тратя на это дополнительного времени. Если же горит красный сигнал, Никита послушно останавливается, но остаётся крайне недоволен пережитым опытом.

Про светофор известно, что он t_1 секунд горит зелёным, t_2 секунд — красным, а затем цикл повторяется. При этом он показывает, сколько секунд осталось до следующей смены сигнала. Никите известны t_1 и t_2, поскольку он давно живёт неподалёку.

A. Используя бег и ходьбу, Никита может корректировать время, в которое он окажется на перекрёстке. Какое максимальное расстояние ему придётся пробежать, чтобы не стоять на светофоре?

Решение: Время между самым ранним и самым поздним моментами, когда Никита может оказаться на перекрестке, должно быть не меньше t_2. Иначе всё это время может гореть красный свет, и Никите придётся остановиться. Пусть S — максимальное расстояние, преодоленное бегом. Тогда

$$\frac{S}{2\,\text{м/с}} - \frac{S}{5\,\text{м/с}} = t_2, \qquad S = \frac{10}{3}\text{м/с} \cdot t_2.$$

B. Пусть $t_1 = 30$, $t_2 = 45$, а Никита начинает видеть сигнал светофора лишь за 100 метров до перекрёстка — и в этот момент может принять решение, что ему делать дальше. Что может показывать светофор, чтобы Никита не смог обеспечить себе безостановочное прохождение перекрёстка?

Решение: Никита может быть около светофора через 20 секунд (100/5), через 50 секунд (100/2), а также в любой момент времени между этими двумя. Чтобы заставить Никиту остановиться, всё это время должен гореть красный свет. Значит, например, если изначально светофор показывал 15 секунд до конца зелёного света, Никите придётся остановиться. Понятно, что этот ответ не единственный.

C. Пусть при тех же условиях Никита видит сигнал светофора не за 100, а за 200 метров. Как ему выбрать время, когда переходить на бег, в зависимости от показаний светофора?

Решение: Если Никита начнёт бежать сразу, как увидит светофор, он будет на перекрёстке через 40 секунд. Если пройдёт всё расстояние пешком — будет там через 100 секунд.

Где-то в 60 секунд между этими моментами обязательно будет зелёный свет. Пусть он заканчивает гореть через $100 - t$ секунд после того, как Никита увидел светофор. Осталось понять, когда Никите начинать бежать, чтобы быть у светофора через $100 - t$ секунд.

Пусть Никита начал бежать через τ секунд. Тогда он потратит на то, чтобы добраться до светофора, $\tau + \frac{2}{5} \cdot (100 - \tau)$ секунд. Приравняем две величины:

$$\tau + \frac{2}{5} \cdot (100 - \tau) = 100 - t, \qquad \tau = 100 - \frac{5}{3}t.$$

Это и есть ответ на задачу.

Задача 8. Отряды охраны

Система счисления с основанием n — это способ записать натуральное число N в виде последовательности *цифр* ${a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}_n$, где

$$a_i = (N \operatorname{div} n^i) \bmod n.$$

Соответственно, каждая цифра лежит в пределах от 0 до $n-1$. У некоторых систем счисления есть свои названия: двоичная, шестеричная, десятичная.

A. Назовите наименьшее натуральное число, запись которого в шестеричной системе счисления на два знака длиннее, чем запись его же в десятичной.

Решение: Легко понять, что такое число будет степенью шестёрки, потому что именно на таких числах возрастает длина записи в шестеричной системе. Ответ $100000_6 = 6^5 = 7776_{10}$.

B. Докажите, что если число, записывающееся в системе счисления с некоторым основанием как 100, делится на натуральное число пятнадцать, то и число, записывающееся в той же системе счисления как 10, делится на пятнадцать.

Решение: Обозначим основание системы счисления через n. Тогда первое число — это n^2, а второе число — это n. Если n^2 делится на $15 = 3 \cdot 5$, то и n делится на 15, что и требовалось доказать.

C. Про число N известно, что оно записывается в системе счисления с некоторым основанием n как

$$(n-1)(n-1)(n-1)(n-1)0_n.$$

То есть, каждая из первых четырёх цифр равна $n-1$, а последняя цифра — ноль. Докажите, что тогда число N делится на три последовательных натуральных числа.

Решение: Оно делится на $n-1$ (потому что каждая цифра — это $n-1$), на n (потому что оканчивается на 0) и на $n+1$ (потому что это число записывается как 11, частное получается $(n-1)\,0\,(n-1)\,0$. Также перебором остатков можно получить, что рассматриваемое число делится на 1, 2 и 3 — это тоже верный ответ.

Задача 9. Шутка

Смотреть 4 класс, задачу №3.

Задача 10. Всё очень плохо, вокруг сплошная слякоть

Один радист передал другому сообщение: «Всё очень плохо, вокруг сплошная слякоть». Каждый следующий радист передавал дальше сообщение, которое начинал со слов «Привет, друг!», а затем дважды повторял текст сообщения, которое получил.

A. Выпишите текст сообщения, переданного четвёртым радистом.

Решение: Четвёртый радист передаст сообщение: «ПД! ПД! ПД! ВОП, ВСС. ВОП, ВСС. ПД! ВОП, ВСС. ВОП, ВСС. ПД! ПД! ВОП, ВСС. ВОП, ВСС. ПД! ВОП, ВСС. ВОП, ВСС». Здесь «ПД!» — это «Привет, друг!», «ВОП» — это «Всё очень плохо», а «ВСС» — это «вокруг сплошная слякоть».

B. Мог ли какой-то радист передать другому сообщение, состоящее из 2020 слов?

Решение: Первое сообщение состоит из 6 слов, второе из 14, третье из 30. Перебором остатков можно получить, что длина сообщений имеет остаток 0 либо 2 при делении на 3: $0 \cdot 2 + 2 \equiv_3$

2, $2 \cdot 2 + 2 \equiv_3 0$. 2020 же имеет остаток 1, поэтому получиться не может.

C. Из скольки слов состоит сообщение, отправленное n-ым радистом? Ответ должен зависеть от n.

Решение: $2^{n+2} - 2$. Каждое сообщение дублируется на следующем шаге, а в его начало добавляются два слова. Проверим, что наш ответ удовлетворяет этому свойству:

$$2 \cdot \left(2^{n+2} - 2\right) + 2 = 2^{n+1+2} - 2.$$

Чтобы получить этот ответ, потребуется некоторая доля интуиции. Так как на каждом шаге мы удваиваем предыдущее сообщение, ответ должен содержать степень двойки. К ответу добавляется -2, потому что после каждого удвоения дописывается ещё два слова. Двойка возводится в степень $n + 2$, а не n, чтобы совпало количество слов в первом сообщении.

Задачи 8 класса

Задача 1. Расписание

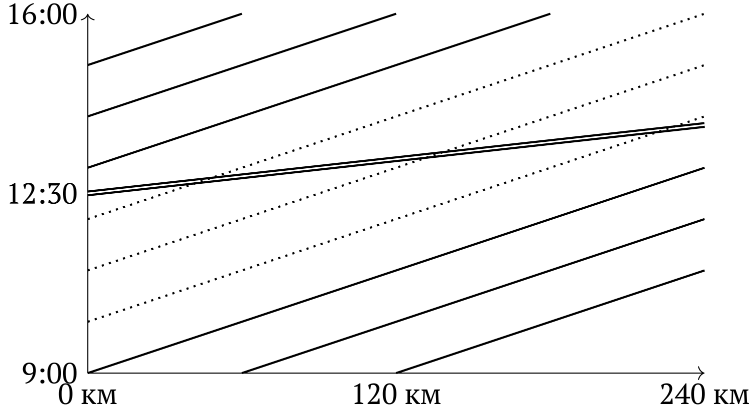
A. Электрички отправляются из начала линии в 00 минут каждого часа и движутся с постоянной скоростью 60 километров в час (ускорениями и остановками для простоты пренебрежём).

Если по той же линии запустить скоростной поезд, он неизбежно будет нагонять электрички — поэтому если эксплуатировать подвижной состав на том же пути, то часть электричек придётся отменить во избежание задержек и аварий.

Сколько электричек придётся отменить, если скоростной поезд отправляется в 12:30 и едет по одному пути с электричками 240 километров со скоростью 180 километров в час?

Решение: Легко посчитать, что скоростной поезд пройдёт 240 километров за $1\frac{1}{3}$ часа — и прибудет в конечный пункт в 13:50. Электричка же требует на этот маршрут 4 часа.

Отталкиваясь от этих данных, построим график движения: по оси абцисс отложим положение на дороге, по оси ординат — время. Сплошными и пунктирными линиями обозначим положение электричек в зависимости от времени, двойная линия — скоростной поезд.

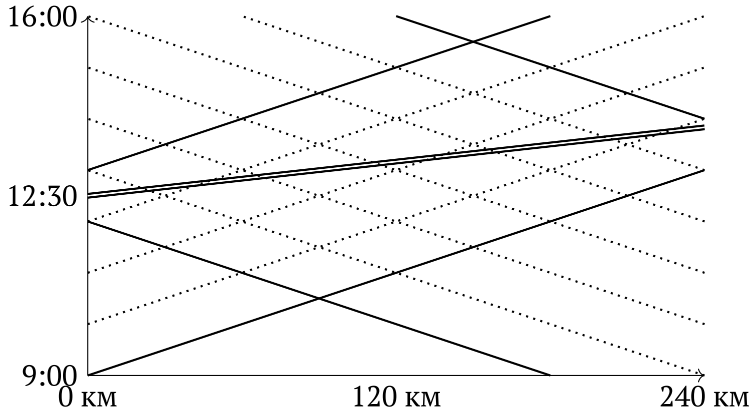


Отменены будут в точности те электрички, которые пересекают двойную линию скоростного поезда. Их три.

В. Рассмотрим двупутную линию длиной 240 км, из противоположных концов которой каждый час в 00 минут отправляются электрички. Скоростной поезд, отправляясь в 12:30 из начала пути, может обогнать электричку по встречному пути, если этот путь свободен на 15 километров в обе стороны в момент обгона. Если до конца линии остаётся менее 15 километров, но путь свободен, обгон также возможен (в этом случае поезд оправится или прибудет на вокзал по встречному пути). Будем считать, что переход на встречный путь можно совершить в любом месте, то есть, стрелок достаточно много.

Сколько электричек (встречных и/или попутных) придётся минимально отменить для пропуска скоростного поезда?

Решение: Дополним график из предыдущего пункта:



Нетрудно видеть, что проблемы возникнут, только если рядом встретится три поезда — тогда на двух путях им не хватит места. Таких мест потенциально только три: в местах обгона скоростным поездом попутных электричек.

Посчитаем, в какие моменты времени это произойдёт, и оценим положение всех поездов. Положение скоростного поезда определяется формулой $s(t) = (t - 12.5) \cdot 180$, где t — время в часах. Положение попутных электричек $e_{\text{п}}^{k}(t) = (t - k) \cdot 60$, встречных $e_{\text{в}}^{k}(t) = 240 - (t - k) \cdot 60$, где k — время отправления электрички.

Итого, уравнение будет таким:

$$(t - 12.5) \cdot 180 = (t - k) \cdot 60$$

Время встречи t тогда будет таким:

$$t = \frac{37.5 - k}{2}$$

Поскольку k может быть любым целым числом (это номер часа отправления поезда), то заметим, что $t = 0.5n + 0.25$, где n — некоторая новая переменная, введённая для упрощения изложения. Соответственно, точкой встречи будет $s = (0.5n - 12.25) \cdot 180$.

Теперь оценим расстояние между точкой встречи и встречным поездом. Встречные поезда в эти моменты окажутся в позициях

$$e_{\text{в}}^k = 240 - (0.5n + 0.25 - k) \cdot 60 = 225 - 30n + 60k.$$

Соответственно, расстояние будет

$$\begin{aligned}|e_{\text{в}}^k - s| =& |225 - 30n + 60k - 90n + 2205| = \\ =& |60k - 120n + 2430| = |60(k - 2n + 40) + 30| = \\ =& |60z + 30|, \qquad z \text{ — целое число.}\end{aligned}$$

Иными словами, расстояние до встречного поезда при обгоне никогда не бывает меньше 30 километров, чего вполне достаточно для перехода на соседний путь и возврата назад, и ни один поезд отменять не нужно.

C. Скоростные поезда отправляются с двух сторон двупутной линии каждые два часа. Также по линии курсируют электрички. Можете ли вы предложить такое расписание отправлений, чтобы поезда могли следовать по линии без задержек (нужно указать моменты в двухчасовом интервале для отправления скоростных поездов с концов линии и для электричек — всего 4 момента), либо доказать, что это невозможно, и даже одной пары электричек пропустить по столь загруженной линии не получится? Всё так же разрешены обгоны по встречному пути.

Решение: Используя анализ из предыдущих пунктов, заметим, что расписание из пункта **B** почти подходит. Нам надо только убрать две электрички из него и заменить их на один скоростной поезд.

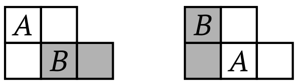
Обозначим момент начала двухчасового интервала за t. Если скоростные поезда отправятся в $t + 0{:}30$, то они встретятся в $t + 1{:}10$. Соответственно, если отправить электрички в t, то обгоны электричек состоятся в $t + n + 0{:}45$.

Как было показано в пункте **B**, в эти моменты расстояние до встречных электричек достаточное для обгона. Также, время до момента встречи со вторым скоростным поездом — минимум 25 минут, что означает отсутствие встречного скоростного поезда на 150 километров вперёд. Для обгона при таком расписании не создадут помехи ни электрички, ни скоростные поезда.

Задача 2. Разрезания — 2

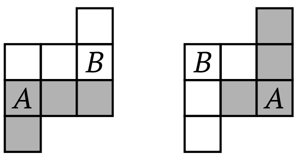
A. Можно ли нарисовать на клетчатой бумаге такие фигуры F, A, B, что F можно разрезать на A и B по линиям сетки двумя различными способами — то есть, линии разреза этих двух способов должны выглядеть по-разному? Точнее: если начертить одну из линий разреза на фигуре F, то её не получится превратить в другую линию никакой комбинацией поворотов и отражений фигуры F.

Решение: Подойдут, например, две такие фигуры:



B. Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру F, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному: если начертить одну из линий разреза на фигуре F, то её не получится превратить в другую линию никакой комбинацией поворотов и отражений фигуры?

Решение: Подойдут, например, такие фигуры:



C. Какую наименьшую площадь может иметь фигура F, которая может быть решением пункта **B**?

Решение: 4 клетки. То, что нельзя сделать так с трёхклеточными фигурами, получается перебором.

Задача 3. «Это портал!»

В принципиально новом отеле «Скол кВ» нет дверей, лестниц и коридоров. Вместо них в каждой комнате есть портал, с помощью которого можно перемещаться в любую другую комнату или в холл отеля. К сожалению, порталы в комнатах заросли бурьяном, сгнили и требуют ремонта.

A. Связи между порталами оказались нарушены, поэтому порталы стали работать следующим образом:
- из комнаты с номером $n > 9$, если n делится на 7, портал переносит вас в комнату с номером $\frac{n}{7}$;
- из комнаты с номером $n > 9$, если n не делится на 7, но делится на 2, портал переносит вас в комнату с номером $n - 2$;
- из комнаты с номером $n > 9$, если n не делится ни на 7, ни на 2, портал переносит вас в комнату с номером $n - 1$;
- как только вы оказываетесь в комнате, номер которой не превосходит 9, то есть на первом этаже, вы сбегаете через окно и уезжаете из этого проклятого места.

Пусть изначально вас заселили в комнату с номером 2047. В скольких комнатах вы успеете побывать, прежде чем выберетесь на волю? Каким будет номер комнаты, через окно которой вы сбежите?

Решение: Приведём последовательность шагов, которые Вам придётся предпринять для побега:

$$2047 \xrightarrow{-1} 2046 \xrightarrow{-2} 2044 \xrightarrow{:7} 292 \xrightarrow{-2} 290 \xrightarrow{-2} 288 \xrightarrow{-2}$$

$$286 \xrightarrow{-2} 284 \xrightarrow{-2} 282 \xrightarrow{-2} 280 \xrightarrow{:7} 40 \xrightarrow{-2} 38 \xrightarrow{-2}$$

$$36 \xrightarrow{-2} 34 \xrightarrow{-2} 32 \xrightarrow{-2} 30 \xrightarrow{-2} 28 \xrightarrow{:7} 4$$

Как нетрудно видеть, чтобы сбежать нужно сделать 17 независимых шагов.

B. Система экстренного отключения прекращает работу всех порталов в отеле. Однако один постоялец не успевает переместиться из одной комнаты в другую и зависает где-то между ними. Он себя осознал движущимся на разнопеременных скоростях в толще некоего глобального соляриса. Этот солярис состоял из некоего подобия жидких кристаллов. Из их стыков, из их взаимопереливов на постояльца снизошло понимание, что выбраться из этого пространства между мирами можно только в том случае, если он найдёт, сколько шагов следующего алгоритма будет пройдено, если начинать с числа 11:

- к числу постояльца прибавляется 79;
- если после прибавления получился точный квадрат или куб, из него нужно вычесть 14;
- эти два действия применяются до тех пор, пока не получится число больше 1000.

Помогите постояльцу вернуться в реальный мир.

Решение: Вновь просто выпишем шаги алгоритма:

$$11 \xrightarrow{+79} 90 \xrightarrow{+79} 169 \xrightarrow{-14} 155 \xrightarrow{+79} 234 \xrightarrow{+79}$$
$$313 \xrightarrow{+79} 392 \xrightarrow{+79} 471 \xrightarrow{+79} 550 \xrightarrow{+79} 629 \xrightarrow{+79}$$
$$708 \xrightarrow{+79} 787 \xrightarrow{+79} 866 \xrightarrow{+79} 945 \xrightarrow{+79} 1024$$

Постояльцу достаточно 14 шагов, чтобы выбраться из Междумирья.

C. Приходит электрик и пытается починить чудящие порталы. У электрика нет выключателя, есть только включатель. Электрик случайно уронил включатель на пульт управления порталами, поэтому их настройки изменились. Теперь порталы работают так:

- все люди из комнат с номерами $n \geq 1000$ попадают в комнаты с номерами $n - 7$;

– все люди из комнат с номерами $n < 1000$ совершают сразу три телепортации подряд: сначала перемещаются в комнату с номером $n+5$, а потом — дважды телепортируются согласно данному алгоритму;
– эти два правила применяются, пока могут применяться.

К счастью, к этому моменту из отеля уже успели уехать все постояльцы, кроме Георгия, который на момент падения включателя был в комнате номер 84. Сможет ли Георгий выбраться из отеля в этом случае?

Решение: Обозначим телепортацию из номера n за $f(n)$. Тогда переформулируем условие в терминах f:

$$f = \begin{cases} n-7, & n \geq 1000 \\ f(f(n+5)), & n < 1000 \end{cases}$$

Попробуем найти $f(84)$:

$$\begin{gathered} f(84) = f(f(84+5)) = f(f(89)) = f(f(f(104))) = \ldots = \\ \underline{f(f(\ldots f(994)\ldots))} = f(f(\ldots f(999)\ldots)) = f(f(\ldots f(1004)\ldots)) = \\ f(f(..f(1004-7)..)) = f(f(\ldots f(997)\ldots)) = f(f(\ldots f(1002)\ldots)) = \\ f(f(\ldots f(995)\ldots)) = f(f(\ldots f(1000)\ldots)) = f(f(\ldots f(993)\ldots)) = \\ f(f(\ldots f(998)\ldots)) = f(f(\ldots f(1003)\ldots)) = f(f(\ldots f(996)\ldots)) = \\ f(f(\ldots f(1001)\ldots)) = \underline{f(f(\ldots f(994)\ldots))} = \ldots \end{gathered}$$

Заметим, что телепортация зашла на цикл: из номера 994 Георгий через несколько телепортаций вновь попадёт в 994. Отсюда можно предлположить, что телепортации никогда не закончатся. Чтобы подтвердить это, достаточно лишь понять, что количество телепортаций, скрывающихся за многоточием в $f(f(\ldots f(994)\ldots))$ увеличивается с каждым следующим витком цикла.

Введём обозначение: $f^1(n) = f(n)$, $f^2(n) = f(f(n)), \ldots$. Согласно алгоритму из условия, $f^k(n) = f^{k-1}(n-7)$ при $n \geq 1000$ и

$f^k(n) = f^{k+1}(n+5)$ при $n < 1000$. Тогда пусть первый раз, когда Георгий попадёт в номер 994, ему останется телепортироваться ещё k раз, то есть необходимо вычислить $f^k(994)$. Построим дальнейшие шаги и будем следить за изменениями k:

$$f^k(994) = f^{k+1}(999) = f^{k+2}(1004) = f^{k+1}(997) = f^{k+2}(1002) = f^{k+1}(995) = f^{k+2}(1000) = f^{k+1}(993) = f^{k+2}(998) = f^{k+3}(1003) = f^{k+2}(996) = f^{k+3}(1001) = f^{k+2}(994) = \dots$$

Количество оставшихся телепортаций с каждым следующим заходом на круг увеличивается на 2. Значит, телепортации для невезучего Георгия не закончатся до тех пор, пока электрик не починит порталы.

Задача 4. Числа Фибоначчи

Числа Фибоначчи — это последовательность натуральных чисел $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$, определяемая следующими условиями:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 1, \qquad \mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Иными словами, каждое число Фибоначчи равно сумме двух предыдущих чисел Фибоначчи.

A. Рассмотрим алфавит из трёх букв: a, b, c. Докажите, что количество слов длины n, составленных из буквосочетаний ab и c, равно числу Фибоначчи $\mathcal{F}_{n+1}$.

Решение: При длинах 1 и 2 всё сходится. Слов длины 1 — одно: c, слов длины 2 — два: ab, cc. Посмотрим на слово длины n. Его последняя буква — либо b, либо c. Если c, то осталось подобрать слово из $n-1$ буквы, это можно сделать $\mathcal{F}_n$ способами. Если b, то предпоследняя буква a — осталось подобрать слово из $n-2$ букв, это можно сделать $\mathcal{F}_{n-1}$ способами.

$\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n+1}$, что и требовалось доказать.

B. Даны n книжек, пронумерованные числами от 1 до n. Дана полка, рассчитанная на n книжек, места на которой пронумерованы числами от 1 до n слева направо. Доказать, что количество способов расставить книжки на полке таким образом, чтобы каждая книжка была на «своём» месте или на месте, соседнем со «своим» — это число Фибоначчи $\mathcal{F}_{n+1}$.

Решение: Посмотрим на книжку номер n. Она либо стоит на своём месте, либо поменялась местами с книжкой номер $n-1$. В первом случае осталось подобрать перестановку $n-1$ книжки, во втором случае — $n-2$ книжек. Это опять же то же самое условие, которому удовлетворяет последовательность чисел Фибоначчи.

C. Даны n книжек, пронумерованные числами от 1 до n, и полка, рассчитанная на n книжек, места на которой пронумерованы числами от 1 до n слева направо. Пусть $r(n)$ — это количество расстановок книжек на полку таких, что номер каждой книжки отличается от номера места, на которое она поставлена, не более чем на 2. Докажите, что

$$r(n) \leq r(n-1) + r(n-2) + 4\Big(r(n-3) + r(n-4) + \ldots + r(1)\Big).$$

Решение: Попробуем применить тот же подход, что и к предыдущему пункту: разделить перестановку книжек на блоки, которые дальше разделить нельзя (например, две книжки, переставленные местами). Выпишем вообще все такие блоки:

1	одна книжка стоит на своём месте
21	две книжки поменяли местами
321	две книжки через одну поменяли местами
3214	
2416385...	при любой длине ≥ 3, рисунок (a)
3152749...	при любой длине ≥ 3, рисунок (b)

(a) (b)

Получается равенство

$$r(n) = r(n-1) + r(n-2) + 3r(n-3) + 3r(n-4) + \\ + 2\Big(r(n-5) + r(n-6) + \ldots + r(1)\Big).$$

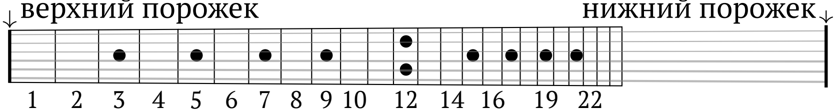
Что и требовалось доказать.

Задача 5. Музыкальная

A. Плеер Дениса поддерживает поиск по песням — можно ввести последовательность букв, и плеер покажет все песни, в названии которых содержится подстрока из этих букв. Денис заметил, что для каждой песни в его библиотеке существует подстрока из трёх букв в её названии, такая что результат поиска по этой подстроке — эта песня и только она. В названии каждой песни, разумеется, не менее трёх букв, названия всех песен написаны русскими буквами. Какое наибольшее число песен может быть в плеере у Дениса?

Решение: Столько же, сколько строк длины 3 из букв русского алфавита: 33^3.

B. Длина струны на гитаре от верхнего порожка до нижнего порожка — M сантиметров. Если уменьшить длину струны, издающей звук, то пропорциально увеличится высота звука: в два раза более короткая струна издаёт в два раза более высокий звук. Чтобы уменьшать длину играющей струны, на гитаре сделаны лады, смотреть рисунок ниже.



Отношение частот двух соседних музыкальных звуков равно $2^{\frac{1}{12}}$. Найдите длину первого лада. Лад под каким номером будет в два раза короче первого лада?

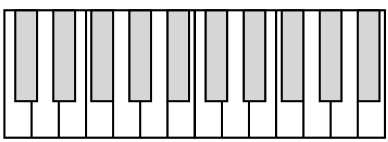
Решение: Отношение длины струны без первого лада к струне вообще равно $2^{-\frac{1}{12}}$ — число чуть меньше единицы. Значит, длина первого лада — $M\cdot(1-2^{-\frac{1}{12}})$. Эта формула является ответом. Приблизительно её значение равно $0.0561\cdot M$.

C. Напомним, как выглядит клавиатура фортепиано. Она состоит из чёрных из белых клавиш, причём чёрная клавиша обязательно накрывает стык между соседними белыми. Пусть ширина белой клавиши составляет 1 дюйм. Можно ли подобрать ширину чёрных клавиш и их расстановку по клавиатуре так, чтобы все расстояния между соседними чёрными клавишами были одинаковы?

Решение: Пусть w — ширина чёрной клавиши в дюймах, а i — интервал между клавишами, также в дюймах. Тогда, если можно расставить клавиши так, как требуется в условии, выполнено следующее:

$$\begin{cases} 5w+5i=7 \\ 2w+i\geq 2 \qquad (\mathrm{D}\sharp,\ \mathrm{F}\sharp) \\ 2i+w\leq 2 \qquad (\mathrm{G}\sharp) \end{cases} \tag{1}$$

На самом деле, совокупность этих условий является необходимой и достаточной. И таким условия удовлетворяют $w=0.8$, $i=0.6$ (есть и другие ответы). Ниже на рисунке приведена клавиатура с такими параметрами. Однако заметим, что когда школьник в работе рисует клавиатуру, он должен явно указать положение всех клавиш, например, расстояния между краями белых и краями чёрных клавиш.



Задача 6. Разделяй и властвуй

Смотреть 6 класс, задачу №1.

Задача 7. Объясните свою двойковость

Рассмотрим множество M таких натуральных степеней двойки, в которых она может входить в разложение факториала натурального числа на простые множители.

Иными словами, M состоит из натуральных чисел n, для которых найдётся такое натуральное N, что выполнено равенство $N! = 2^n \cdot r$, где r — нечётное число.

Например, число 4 лежит в множестве M, потому что $6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

A. Докажите, что число 2 не принадлежит множеству M.

Решение: $2! = 2$, $3! = 2 \cdot 3$, а $4!$ уже делится на 2^3 — разумеется, и все последующие факториалы тоже. Значит, никакой факториал $n!$ не делится в точности на $2^2 = 4$, не делясь при этом на восемь.

B. Докажите, что найдутся сколь угодно длинные отрезки из натуральных чисел, целиком лежащие вне множества M.

Решение: Пусть мы хотим найти отрезок длиной t. Тогда рассмотрим число 2^{t+1}. Пусть $(2^{t+1} - 1)! = 2^n \cdot r$, тогда $\left(2^{t+1}\right)! = 2^{n+t+1} \cdot r$. Все числа между n и $n + t + 1$ — их ровно t штук — не лежат в M.

C. Докажите, что если числа a и $a + 1$ принадлежат M, то $a + 2$ не принадлежит M.

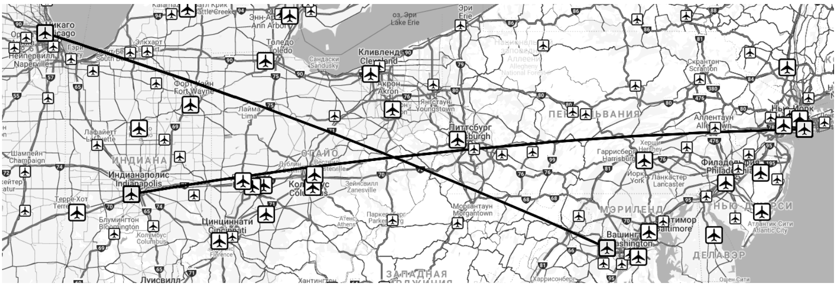
Решение: Рассмотрим наибольшее число t_1 такое, что $t_1! = 2^a \cdot r$, r — нечётное. Рассмотрим наименьшее число t_2 такое, что $t_2! = 2^{a+1} \cdot r$. Легко видеть, что $t_2 = t_1 + 1$, а также t_2 — чётное число, не делящееся на 4. Значит, следующее чётное число после t_2 уже делится на 4, и его факториал будет делиться как минимум на 2^{a+3}.

Задача 8. На плоскости

A. Каждый отрезок делит серединный перпендикуляр к нему на два луча. Верно ли, что у любого многоугольника найдётся сторона, такая что один из этих лучей не пересекает многоугольник?

Решение: Нет, не верно, приведём контрпример, см. Рис. (a).

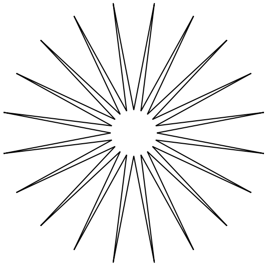
B. Рассмотрим все авиарейсы, поднявшиеся в воздух сегодня, 29 февраля. Не вызывает сомнения, что траектории некоторых из них пересекаются, причём не в конечных пунктах (например, рейсов Вашингтон — Чикаго и Нью-Йорк — Индианаполис). Можно ли переставить аэропорты на поверхности Земли так, чтобы рейсы, соединяющие теперь уже переставленные аэропорты, перестали пересекаться?



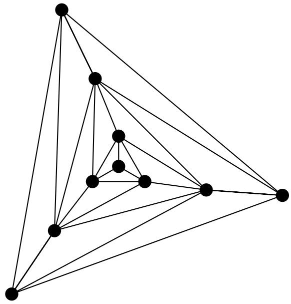
Решение: Рассмотрим три аэропорта в Европе: Париж имени Шарля де Голля, Лондон Хитроу, Амстердам Схипхол, а также три аэропорта в Америке: Даллас—Форт Уэрт, Нью-Йорк имени Джона Кеннеди, Чикаго О'Хара. Каждый аэропорт из европейских трёх соединён с каждым из американских трёх.

Значит, граф рейсов между аэропортами содержит в себе $K_{3,3}$ и никак не может быть вложен в плоскость или нарисован на сферической поверхности Земли (по теореме Куратовского). Говоря грубо, рейсов на Земле слишком много, чтобы они не пересекались.

C. Расположите на плоскости десять точек и соедините их непе-



(a)



(b)

ресекающимися отрезками так, чтобы они разбили плоскость на наибольшее число областей. Не забудьте доказать, что на бо́льшее число областей плоскость разбить не получится.

Решение: Сначала оценим, сколько вообще областей (граней) может получиться. Будем пользоваться формулой Эйлера:

$$\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 1 + \text{С}.$$

Буквы здесь обозначают количества вершин, рёбер, граней и компонент связности соответственно.

Рассмотрим все пары вида (грань, её ребро), обозначим их количество через $(\Gamma, \text{Р})$. Заметим, что $3\Gamma \leq (\Gamma, \text{Р}) \leq 2\text{Р}$, так как каждое ребро лежит не более чем в двух гранях, а каждую грань очерчивает не менее чем три ребра. Значит, $\text{Р} \geq \frac{3}{2}\Gamma$. Отсюда

$$\text{В} - \frac{1}{2}\Gamma \geq 1 + \text{С}, \quad \Gamma \leq 2\text{В} - 4.$$

В нашем случае не получится больше 16 граней. Теперь приведём пример на 16 граней (не забываем о том, что внешняя неограниченная область также считается), см. Рис. (b).

Задача 9. Нужно уметь считать

Рассмотрим последовательность целых чисел $b_0, b_1, b_2, \ldots$. *Запись числа N* в системе счисления, определённой последовательностью

$b_0, b_1, b_2, \ldots$ — это последовательность неотрицательных целых чисел $d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0$ такая, что

$$\sum_{i=0}^{n} d_i b_i = b_n d_n + \ldots + b_1 d_1 + b_0 d_0 = N.$$

Например, в привычной нам десятичной системе счисления $b_i = 10^i$, а d_i — цифры от 0 до 9.

Ася, Вася и Мася состоят в клубе презирателей десятичной системы счисления. Их попросили записать натуральные числа от 1 до 5 в их любимой системе счисления.

A. Ася записала: 1; 10; 100; 101; 1000. Восстановите последовательность b_n и запишите в этой системе счисления числа 6, 7 и 8.

Решение: Из записи видно, что $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 5$. Ряд 1, 2, 3, 5 — это начало ряда чисел Фибоначчи. Поэтому 6 запишется как 1001, 7 — как 1010. Поскольку 8 это следующее после 5 число в числах Фибоначчи, то 8 запишется как 10000.

B. Вася записал: 1; 2; 120; 121; 122. Восстановите последовательность b_n и запишите в этой системе счисления числа 6, 7 и 8.

Решение: Из записи чисел видно, что $b_0 = 1$ и $b_2 + 2b_1 = 3$. К сожалению больше информации выудить нельзя и поэтому вместо b_1 и b_2 можно положить любые целые числа так, чтобы $b_2 + 2b_1 = 3$.

C. Числа b_i, однако, могут быть и не целыми. Более того, если даны числа с отрицательными номерами $b_{-1}, b_{-2}, \ldots$, то можно определить дроби — точно так же, как определены десятичные дроби в десятичной системе счисления. Мася записала: 1; 10.01; 100.01; 101.01; 1000.1001. Известно, что $b_i = x^i$ для некоторого числа x. Найдите x и запишите в этой системе счисления число 6.

Решение: Из записи получим систему

$$\begin{cases} x + x^{-2} = 2, \\ x^2 + x^{-2} = 3. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнение первое, получаем уравнение $x^2 - x = 1$, которое имеет два корня: $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Подставляя x_2 в запись для числа 5 убеждаемся, что $x_2^3 + x_2^{-1} + x_2^{-4} \neq 5$. Таким образом основание системы счисления равно $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Тогда число 6 можно записать как $5 + 1$, то есть 1001.1001, или, что более правильно, 1010.0001.

Задача 10. Шутка

Смотреть 4 класс, задачу №3.

Задача 11. Сортировка — 2

Выпишем все числа от одного до десяти — но не в привычном порядке возрастания, а в алфавитном порядке: восемь, два, девять, десять, один, пять, семь, три, четыре, шесть. В этой задаче вам предлагается исследовать порядок, в котором будут стоять числа некоторого множества, если их отсортировать по алфавиту.

A. Числа от 1 до 10’000’000’000 (десять миллиардов) выписали в алфавитном порядке. Перечислите первые десять из них.

Решение: (1) 18 (2) 18 миллионов (3) 18 миллионов 18 (4) 18 миллионов 18 тысяч (5) 18 миллионов 18 тысяч 18 (6) ...восемь (7) ...восемьдесят (8) ...88 (9) ...82 (10) ...89.

B. Числа от 1 до N выписали в алфавитном порядке. Какое число, в зависимости от N, будет последним?

Решение: Числа до 666 рассматриваются отдельно. Сначала последним будет 6, потом 60, потом 600, 606. После 666 последним будет число, состоящее из шестёрок — их количество должно быть кратно трём. Какое именно это будет число? Такое, что старшая степень десятки в нём (666 миллиардов…, 666 миллионов…) будет последней по алфавиту.

Критерии: Догадались, что число из шестёрок — 3 балла. Догадались, что количество шестёрок кратно трём — ещё 3 балла.

C. Числа от K до N выписали в алфавитном порядке. Какое число, в зависимости от K и N, будет стоять на первом месте?

Решение этой задачи может стать достойной исследовательской работой.

Задача 12. Операция Струя

A. Представьте число 770177 в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

Решение: $770177 = 385089^2 - 385088^2$. Это единственный ответ. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, а число 770177 простое. Значит, $a - b = 1$.

B. Всякое ли натуральное число можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел?

Решение: Нет, потому что числа $a + b$ и $a - b$ либо одновременно чётные, либо одновременно нечётные. Значит, их произведение не может быть чётным числом, не делящимся на 4.

C. Докажите, что всякое натуральное число N представимо в виде знакочередующейся суммы убывающих степеней двойки — то есть,

$$N = 2^{n_1} - 2^{n_2} + 2^{n_3} - 2^{n_4} + \ldots + (-1)^k \cdot 2^{n_k},$$
$$n_1 > n_2 > n_3 > \ldots > n_k.$$

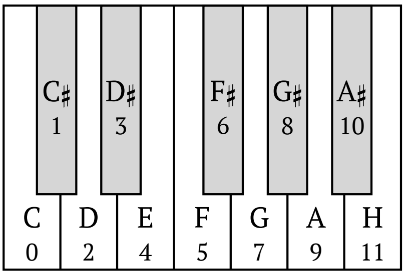
Решение: Рассмотрим число из n единиц двоичной системе счисления. Оно представимо в виде $2^n - 2^0$. Любое число вообще представимо в виде суммы нескольких таких:

$$\begin{array}{ccccccccc} 111 & \ldots & 111 & 00\ldots00 & 111 & \ldots & 111 & \ldots \\ 2^{n_1} & - & 2^{n_2} & + & 2^{n_3} & - & 2^{n_4} & + \end{array}$$

Задачи профильного варианта 7 класса

Задача 1. Не идёт на лад

Октава — это набор из 12 звуков, где частота каждого следующего в $2^{\frac{1}{12}}$ раз выше частоты предыдущего. Этим звукам традиционно даны буквенные обозначения (смотреть рисунок ниже). Соответственно, звук C в следующей октаве имеет частоту в два раза выше, чем звук C в данной. Для удобства пронумеруем звуки в октаве остатками по модулю 12, от 0 до 11. Если повысить частоту звука H в $2^{\frac{1}{12}}$ раз, получится звук C, только в следующей октаве — как это и подразумевает арифметика остатков. Звуки C, D, E, F, G, A, H будем называть *нотами*.



Лад — это способ выбрать семь звуков из октавы так, чтобы композиция, построенная на этих звуках, имела определённую эмоциональную окраску. В Древней Греции различали семь ладов:

Лидийский	C	D	E	F♯	G	A	H
Ионийский	C	D	E	F	G	A	H
Миксолидийский	C	D	E	F	G	A	A♯
Дорийский	C	D	D♯	F	G	A	A♯
Эолийский	C	D	D♯	F	G	G♯	A♯
Фрикийский	C	C♯	D♯	F	G	G♯	A♯
Локрийский	C	C♯	D♯	F	F♯	G♯	A♯

Музыка, написанная в каждом из ладов, наделялась каждая своим настроением (ионийский — «лёгкий», «размягчающий», «застольный»; дорийский — «мистический», «боговдохновлённый», «религиозный»). Однако по какому принципу построены эти семь ладов, почему их семь и почему они включают в себя ровно такие звуки? В этой задаче вам предлагается самостоятельно в этом разобраться!

1. Как выбрать семь натуральных чисел, так что их сумма равна 12, а сумма квадратов — наименьшая возможная? Докажите, что все числа в полученном наборе будут равны 1 или 2.

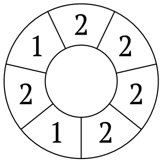
2. Представим себе кольцо, разделённое на семь клеток. Если поставить в две из них единицы, а в остальные двойки, образуется два отрезка из двоек, стоящих подряд. На рисунке (a) эти отрезки состоят из одной и четырёх клеток соответственно. Рассмотрим сумму квадратов длин этих отрезков. Расставьте две единицы и пять двоек в клетки кольца таким образом, чтобы эта сумма принимала наименьшее возможное значение. Сколько есть способов это сделать?

Назовём *ладным кольцом* кольцо, в клетки которого расставлены единицы и двойки таким образом, что сумма квадратов длин отрезков, определённая в пункте 2, минимальна. Выберем одну из границ между клетками кольца, разрежем кольцо по ней и распрямим его, получится *ладная доска.* Например, ладному кольцу и границе на рисунке (b) соответствует ладная доска на рисунке (c).

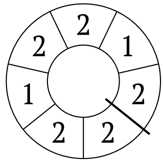
3. Сколько всего существует ладных досок? Нарисуйте их все.

4. Назовём две ладных доски *близкими,* если найдётся место, на котором в них обоих стоит единица. Рассмотрим одну ладную доску — сколько существует ладных досок, близких к ней?

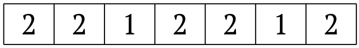
5. Заметим, что в составе каждого лада разность номеров двух соседних звуков — 1 или 2. Для каждого лада проверьте, что если



(a)



(b)



(c)

написать между каждыми двумя соседними звуками в его составе разницу их номеров, то получившийся ряд чисел образует одну из ладных досок.

6. Проверьте, что для всякой ладной доски найдётся лад, из которого она может быть получена способом, описанным в пункте 5. Убедитесь, что ладам, стоящим рядом в представленном списке, соответствуют близкие ладные доски. Убедитесь, что лидийскому и локрийскому ладам соответствуют близкие ладные доски.

7. Рассмотрим лад $(s_1, \ldots, s_7)$ и соответствующую ему ладную доску $(d_1, \ldots, d_7)$. Заметим, что весь лад можно построить по правилу $s_{i+1} = (s_i + d_i) \bmod 12$. Введём операцию *инвертирование.* Результатом её применения к данному ладу будет такой лад $(r_1, \ldots, r_7)$, что

$$r_1 = s_7, \quad r_{i+1} = (r_i + d_{7-i+1}) \bmod 12.$$

Докажите, что дорийский лад при инвертировании переходит в себя же. Что при инвертировании происходит с остальными ладами?

Рассмотрим ладную доску $(d_1, \ldots, d_7)$, соответствующую некоторому ладу, и выберем звук s_1 из октавы. Тогда по нему можно построить свой лад $(s_1, \ldots, s_7)$ по правилу $s_{i+1} = (s_i + d_i) \bmod 12$. Добавим к имени этого лада приставку «s_1-».

Например, возьмём ладную доску эолийского лада, $(2, 1, 2, 2, 1, 2, 2)$, и звук A. Получим лад — A, H, C, D, E, F, G. Будем называть его A-эолийским.

8. Докажите, что найдётся такой звук s, что все звуки в s-локрийском ладу окажутся нотами (то есть, не будет ни одного $\sharp$). Убедитесь в этом и для каждого из остальных ладов.

9. Заметим, что набор звуков A-эолийского лада совпадает с набором звуков C-ионийского лада с точностью до октавы. Докажите, что для любого лада найдётся звук s такой, что набор звуков s-ионийского лада совпадает со набором звуков данного лада с точностью до октавы.

Задача 2. Високосные года

Сутки — это отрезок между двумя моментами времени, когда Солнце на небосводе находится выше всего. На Земле длина суток неизменна и равна 24 часам. *Год* — это период обращения Земли вокруг Солнца. Процессы вращения Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца никак между собой не связаны, поэтому глупо было бы ожидать того, что год был бы равен целому количеству суток.

На Земле год составляет 365.2421875 суток. Однако человечеству хотелось бы иметь календарь и когда-то праздновать Новый год (а также проводить олимпиаду «Математика НОН-СТОП» неизменно в начале весны). Проще всего положить *календарный год* равным 365 суткам, но тогда уже через 150 лет Новый год будет приходиться на осень. Поэтому была придумана система *високосных лет* — это такие года в календаре, продолжительность которых составляет 366 суток (то есть на одни сутки больше, чем обычно).

Система високосных лет на Земле устроена так:

Если номер года делится на 4, то он високосный,

Если при этом номер года делится на 100, то он не високосный,

Но если номер года делится на 400, то он всё-таки високосный, *Однако, если номер года делится на 3200, то он не високосный.*

По какому принципу выбраны числа 4, 100, 400, 3200? Во-первых, каждое следующее из них делится на предыдущее. Во-вторых, легко заметить, что средняя длина календарного года будет равна знакочередующейся сумме чисел, обратных к выбранным, прибавленной к числу 365 — то есть,

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} - \frac{1}{3200} = 365.2421875.$$

То есть, средняя длина календарного года при выбранной расстановке високосных лет совпадает с настоящей продолжительностью года на Земле.

Теперь представим, что продолжительность года на Земле была бы равна $365 + t$ суток, $t \leq \frac{1}{2}$ — рациональное число. *Система високосных лет* для числа t — это последовательность натуральных чисел $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ такая, что a_{i+1} делится на a_i, а также

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{a_n} \ = \ t.$$

Как мы поняли выше, система високосных лет для числа 0.2421875 — это $(4, 100, 400, 3200)$. В этой задаче мы предлагаем вам почувствовать себя создателями Григорианского календаря — и разработать системы високосных лет для других чисел.

1. Начнём с простых примеров: иногда в системе високосных лет достаточно одного числа. Какой могла бы быть система високосных лет, если бы год составлял

(a) 365.5, (b) 365.25, (c) 365.0125 суток?

2. Теперь перейдём к ситуации, когда в системе потребуется уже два числа. Какой могла бы быть система високосных лет, если бы год составлял 365.475 суток?

3. Пусть високосные года заданы следующим условием:

Если номер года делится на 5, то он високосный,

Если при этом номер года делится на 80, то он не високосный,

Но при этом, если номер года делится на 320, то он всё-таки високосный,

Однако, если номер года делится на 1600, то он не високосный.

Иными словами, известна система високосных лет $(5, 80, 320, 1600)$. Чему тогда равна продолжительность года?

4. Рассмотрим менее тривиальные примеры. Какой могла бы оказаться система високосных лет, если бы год составлял

$$\text{(a) } 365.21875, \quad \text{(b) } 365.17 \quad \text{суток?}$$

5. Пусть продолжительность года равна $365 + t$ суток, $\frac{1}{2} < t \leq 1$. Тогда в системе високосных лет будет $a_0 = 1$ — можно считать, что продолжительность обычного календарного года равна 366 суток, а некоторые, високосные года на один день короче. Придумайте систему високосных лет, если продолжительность года составляет

$$\text{(a) } 365.75, \quad \text{(b) } 365.8125, \quad \text{(c) } 365.80875 \quad \text{суток.}$$

6. Придумайте число t, для которого существует две различных системы високосных лет.

7. Перейдём к более сложным примерам. Придумайте систему високосных лет, если продолжительность года составляет 365.330 суток.

Перед исследователем встаёт естественный вопрос: для любого ли числа t — то есть, для любой ли продолжительности года — существует подходящая система високосных лет? Попробуем ответить на этот вопрос!

8. Докажите, что всякое натуральное число представимо в виде знакочередующейся суммы убывающих степеней двойки — то есть,

$$2^{a_0} - 2^{a_1} + 2^{a_2} - 2^{a_3} + \ldots + (-1)^n \cdot 2^{a_n}, \quad a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n.$$

9. Докажите, что если число t представимо в виде конечной десятичной дроби, для него существует система високосных лет.

10. Для любого ли рационального числа существует система високосных лет?

Задача 3. Максимально

Введём новую операцию: *поразрядный максимум*, или *мацимум* двух чисел a и b (будем обозначать его $\mathrm{maz}(a,b)$) — это число, в каждом разряде которого стоит цифра, наибольшая из цифр в соответствующем разряде у a и b. Приведём пример:

$$\begin{array}{rcl} a & = & 10837 \\ b & = & 24192 \\ \mathrm{maz}(a,b) & = & 24897. \end{array}$$

Аналогично определим *поразрядный минимум*, или *мицимум* двух чисел. Будем обозначать его $\mathrm{miz}(a,b)$.

В этой задаче вам предлагается изучить некоторые свойства этих двух операций.

1. Посчитайте

1)	$\mathrm{maz}(10545, 23477)$	4)	$\mathrm{miz}(55646, 27332)$
2)	$\mathrm{maz}(23242, 1888)$	5)	$\mathrm{miz}(155, 55)$
3)	$\mathrm{maz}(1000, 25)$	6)	$\mathrm{miz}(10, 2)$

2. Бывает ли так, что $\mathrm{maz}(a,b) = a + b$? Бывает ли, что $\mathrm{maz}(a,b) > a + b$? Если да, приведите пример. Если нет, объясните, почему.

3. Докажите, что $\max(a, b) \leq \mathrm{maz}(a, b)$.

4. При каких a, b верно равенство $\mathrm{miz}(a, b) = \mathrm{maz}(a, b)$?

5. Докажите, что

$$\mathrm{maz}(a, b) + \mathrm{miz}(a, b) = a + b.$$

6. Известно, что

$$\max(a + c, b + d) \leq \max(a, b) + \max(c, d).$$

Будет ли верно аналогичное неравенство, если $\max$ заменить на maz?

7. Каким будет ответ в предыдущем пункте, если вместо сложения рассмотреть умножение? Если положительный, докажите это. Если отрицательный, приведите контрпример.

8. Проверьте следующие свойства для операций maz и miz:

а) $\mathrm{miz}(a, a) = a, \quad \mathrm{maz}(a, a) = a.$

б) $\mathrm{miz}(a, b) = \mathrm{miz}(b, a)$, $\mathrm{maz}(a, b) = \mathrm{maz}(b, a)$.

в) $\mathrm{miz}\left(\mathrm{miz}\left(a, b\right), c\right) = \mathrm{miz}\left(a, \mathrm{miz}\left(b, c\right)\right)$,
$\mathrm{maz}\left(\mathrm{maz}\left(a, b\right), c\right) = \mathrm{maz}\left(a, \mathrm{maz}\left(b, c\right)\right)$.

г) $\mathrm{maz}\left(a, \mathrm{miz}\left(a, b\right)\right) = a, \quad \mathrm{miz}\left(a, \mathrm{maz}\left(a, b\right)\right) = a.$

д) $\mathrm{maz}\left(a, \mathrm{miz}\left(b, c\right)\right) = \mathrm{miz}\left(\mathrm{maz}\left(a, b\right), \mathrm{maz}\left(a, c\right)\right)$,
$\mathrm{miz}\left(a, \mathrm{maz}\left(b, c\right)\right) = \mathrm{maz}\left(\mathrm{miz}\left(a, b\right), \mathrm{miz}\left(a, c\right)\right)$.

Ура! Только что вы доказали, что множество натуральных чисел с определёнными на нём операциями maz и miz образует *решётку*. Это очень важный объект в математике. Предлагаем вам выяснить, выполнены ли для данной решётки ещё некоторые интересные свойства:

9. Существует ли такое число N, что для всякого x верно $\mathrm{maz}(x, N) = x$?

10. Существует ли такое число N, что для всякого x верно $\mathrm{miz}(x, N) = x$?

11. Пусть даны два числа a, b. Всегда ли для них найдётся такое число t, что одновременно выполнено

   - $\mathrm{maz}(\mathrm{maz}(a, t), b) = b$;
   - если нашлось x такое, что $\mathrm{maz}(\mathrm{maz}(a, x), b) = b$, то тогда $\mathrm{maz}(x, t) = t$?

Задачи профильного варианта 8 класса

Задача 1. Заполнение прямоугольниками

Пусть дана фигура F на плоскости с фиксированной системой координат. Прямоугольник r называется *внутренним прямоугольником F,* если его стороны параллельны осям координат и r целиком лежит внутри F.

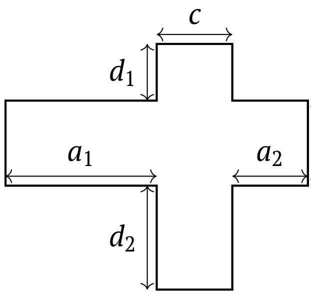
Относительной площадью $s_k(F)$ будем называть наибольшее значение отношения площади объединения k внутренних прямоугольников фигуры F к площади этой фигуры:

$$s_k(F) = \max \frac{S\left(\bigcup_{i=1}^{k} r_i\right)}{S(F)}.$$

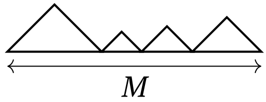
Иными словами, относительная площадь измеряет то, насколько хорошо фигура F может быть приближена данным числом прямоугольников.

1. Найдите относительную площадь s_1 фигуры на рисунке (а).

2. Опишите все фигуры F с относительной площадью $s_2(F) = 1$.



(a)



(b)

3. Пусть известно, что сумма чисел $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ равна M. Докажите, что сумма квадратов этих чисел $a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2$ минимальна, когда эти числа равны между собой.

4. Дан отрезок длины M. Бок о бок построены n прямоугольных равнобедренных треугольников, основания всех их лежат на данном отрезке (как на рисунке (b)). Каждая точка отрезка, включая концы, принадлежит какому-то из треугольников. Докажите, что суммарная площадь треугольников минимальна, если все они одинаковы.

5. Пусть F_{sq} — квадрат со стороной 1, наклоненный на 45° относительно осей координат. Найдите $s_5(F_{\mathrm{sq}})$. Пусть F_{rt} — произвольный прямоугольный треугольник, катеты которого параллельны осям координат. Найдите $s_5(F_{\mathrm{rt}})$.

6. Найдите относительную площадь s_k при произвольном k для фигур из пункта 5.

7. Найдите относительную площадь s_k для правильного восьмиугольника, четыре стороны которого параллельны осям координат.

8. Пусть дана фигура F, $s_k(F) = 1$ для некоторого k. Легко видеть, что F — это многоугольник. Какое наибольшее число сторон он может иметь, в зависимости от k?

9. Определим $g_k(F) = 1 - s_k(F)$. Пусть F_{sq} — квадрат со стороной 1 из пункта 5. Докажите, что найдутся числа $c_1, c_2 \neq 0$, b_1, b_2, такие что
$$\frac{1}{c_1 k + b_1} \leq g_k(F_{\text{sq}}) \leq \frac{1}{c_2 k + b_2}. \tag{2}$$

10. Фигуры, обладающие свойством (2), называются 1-убывающими. Верно ли, что любой многоугольник, хотя бы одна сторона которого не параллельна осям координат, является 1-убывающим?

11. Приведите пример такой фигуры F, что ни при каком k её относительная площадь $s_k(F)$ не равна 1, и F не является 1-убывающей.

Задача 2. Високосные года

Смотреть 7 класс, задачу №2.

Задача 3. Не идёт на лад

Смотреть 7 класс, задачу №1.

ФОНД ПРЕЗИДЕНТСКИХ ГРАНТОВ

ВРЕМЯ НАУКИ

президентскиегранты.рф timeforscience.ru lnmo.ru

Олимпиада **«Математика НОН-СТОП — 2021»** состоится 13 марта 2021 года в очном формате. Её примут более 25 площадок в Санкт-Петербурге, Москве, Бердске, Новом Уренгое, Самаре, Калининграде и других городах.

Олимпиада «Математика НОН-СТОП» может пройти и в Вашей школе! Если вы хотите стать организатором площадки, пишите нам: mathnonstop@timeforscience.ru.

Зарегистрироваться на олимпиаду можно по ссылке rs.mathnonstop.ru.

Информация об олимпиаде на сайте mathnonstop.ru.

Присоединяйтесь к другим проектам фонда «Время науки»!

Санкт-Петербургский турнир юных математиков и регата	spbtym.ru
Балтийский научно-инженерный конкурс и Пространство интеллектуального притяжения	baltkonkurs.ru
Конкурс по решению исследовательских задач «Естественный отбор»	natselection.ru
Летняя научная школа ЛНМО (санаторий «Ветразь», Беларусь)	ant-school.ru

https://mathnonstop.ru/

Санкт-Петербург, 2020