# Математика НОН-СТОП — 2019

*Решения задач олимпиады*

Б. А. Золотов Д. Г. Штукенберг

под редакцией И. А. Чистякова

Фонд «Время науки»
Санкт-Петербург
2019 год

В брошюре представлены условия и решения задач олимпиады «Математика НОН-СТОП — 2019». Олимпиада проводится Фондом «Время Науки» для учеников из Санкт-Петербурга и других регионов Российской Федерации, а также Республики Беларусь.

Издание предназначено для учащихся средних школ, интересующихся математикой, и их преподавателей.

# Содержание

Предлагаем вашему вниманию сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП — 2019». Задачи базовых вариантов приведены с подробными полными авторскими решениями. Задачи профильного варианта приведены лишь в виде условий и могут быть использованы в дальнейшем как интересные исследовательские проекты для школьников.

Также мы публикуем лучшие «задачи–шутки», придуманные участниками как часть решения олимпиады.

Верим, что данная брошюра окажется полезным материалом для занятий математикой и сможет мотивировать школьников принимать участие в математических олимпиадах.

Мы благодарим Санкт-Петербургскую академию постдипломного педагогического образования и Елену Юрьевну Лукичёву за неоценимую помощь в проведении, продвижении и популяризации олимпиады.

**Желаем приятного чтения!**

# Задачи 4 класса

## Задача 1. Розеттский камень

**А.** Перечислите как можно больше пар букв русского языка таких, что если написать эти буквы одна поверх другой, то их будет невозможно идентифицировать. Например, совершенно очевидно, что первая пара букв ниже — это А и Т, но про вторую пару не понятно, это В и Ь или Р и Ь.

(1)

(2)

***Решение:***

Мы можем разобрать буквы по классам (имеет палочку слева, палочку справа, полукруг сверху, снизу), и, вручную просмотрев этот список, получить ответ.

Однако интересно поставить эту задачу в точной математической формулировке и получить на неё точный ответ.

Давайте записывать буквы с помощью 19-сегментного индикатора, возможно, многим знакомого по автомагнитолам и похожим устройствам. На рисунке приведён возможный шрифт:

А теперь найдём все двухбуквенные неразличимые комбинации. Здесь приведены двухбуквенные последовательности и показание на индикаторе, получающееся в качестве результата.

ЮТ ЮП ЮГ; ЮЗ ЮВ; ЭК ЭВ ЧВ НЗ НВ; ЬС ЬЕ ЬГ ЬБ СБ ЕБ ГБ; ЧЙ НЙ; ЮЪ ЮФ; СР РЕ; ЧМ НМ; ЯМ ЯИ; ПЙ ЙГ; ЬХ ЬУ; ШЧ ШН; СЗ ЗГ; СЙ ОЙ; ЩЖ ЦЖ; СМ ОМ; ПЛ ЛГ; ЭИ СА ОА; ЧР РН; ЬФ ФБ; ЮХ ЮЖ; ХЖ УЖ; ЫЩ ЫЦ; ФС ФЕ; ЧК НК; ЦС ЦП ЦО ЦГ; УМ УИ МИ; ЭЬ ЭБ ЧБ НБ; ЬЧ ЬН; ЩФ ЦФ; ЧП ЧГ ПН НГ; ПА ГА; ЪХ ЪЖ; ЫЗ ЫВ ШВ; ЬЫ ЬШ; ПМ МГ; ЩС ЩП ЩО ЩГ; ЫП ЫГ; ЬТ ТБ; ПИ ИГ; ЪЩ ЪЦ; ХМ ХИ; ЮЩ ЮЦ; СЕ ЕГ; ЭН ЭЕ ЧС ЧО ЧЕ СН ОН НЕ; ЯЬ ЯБ; ЯС ЯО; ХФ ФЖ; ЧФ ЧТ; ЩШ ЩЦ ШЦ; РК КГ; ШС ШП ШО ШГ; ЫС ЫО ЫЕ ШЕ; ЩТ ЦТ; СЛ ОЛ; ХТ ТЖ; ЮЧ ЮН; ЮД ЫД; ЮЭ ШФ ФО; ХК УК; ЭЪ ЭТ; ШТ ТО; ПЗ ОЗ; УЙ МЙ; МВ МБ; МЖ ИЖ; ЯУ ЯА; ХЕ ХВ ХБ УВ УБ; ПЕ ОЕ; СИ ОИ; ХЗ УЗ; ЬП ЬО ПБ ОБ; ЖЕ ЖВ ЖБ; ЬР ЬЗ ЬВ СК СВ РЗ РВ РБ КЗ КЕ КВ КБ ЗЕ ЗВ ЗБ ЕВ ГВ ВБ; ЫЧ ЫН; ЧИ НИ НА; ФП ФН ТН; СП СО ПО ОГ; ЫБ ШБ; ЙВ ЙБ; ЧЦ ЦН; ЮЫ ЮШ; ВА БА; ЯЗ ЭХ; ЮС ЮО ЮЕ; ЩЧ ЩН; ЭС ЭП ЭО ЭГ; СД ПД ОД ДГ; ЩД ШД; ИВ ИБ; ПВ ОК ОВ; ЯП ЯГ;

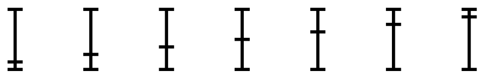
Данный список получен с помощью компьютерной программы, авторы не рассчитывали, что кто-то из участников решит данную задачу столь полно.

**В.** Придумайте алфавит из 12 букв такой, что какие две различные буквы из него ни напиши друг поверх друга, всегда получится одна и та же картинка.

***Решение:*** Например, так: пусть выколотый кусок потихоньку ползёт по горизонтальной черте так, что всякий раз оказываются выколоты попарно непересекающиеся участки черты.

**C.** Для любого $n$ предложите способ построения алфавита из $n$ букв такого, что сколько букв из него ни напиши одна поверх другой, их все можно будет однозначно идентифицировать.

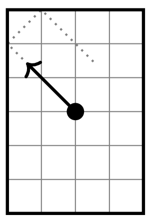
***Решение:*** Пусть $k$-ая буква представляет из себя вертикальную черту с горизонтальной засечкой на расстоянии $\frac{k-1}{n-1}$ длины этой черты от её верха. Тогда по положению двух засечек на черте можно будет однозначно установить, какие две буквы написаны.



## Задача 2. Незакрученный удар

Из клетчатой бумаги вырезан прямоугольник, и на один из узлов сетки поставлен маленький шарик. Шарик запускают под углом $45^\circ$ к линиям сетки в каком-то из направлений. Он катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда шарик подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение.

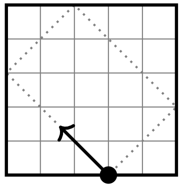
**A.** В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?



***Решение:*** В той же точке — это несложно проверить, отследив путь шарика.

**B.** Приведите пример прямоугольника и изначального положения шарика в нём, такой что через каждый узел сетки, через который шарик будет проезжать после запуска, он проедет только в одном из направлений.

***Решение:*** Подойдет любой квадрат, начальная позиция шарика может быть расположена на стороне квадрата:



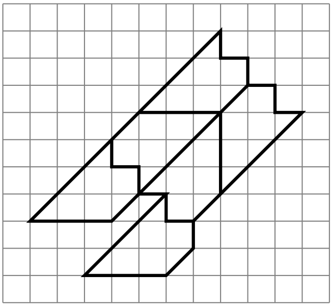
**C.** Докажите, что рано или поздно после запуска шарика (из любого положения, внутри любого прямоугольника) его траектория зациклится — он будет ездить по какому-то набору узлов, повторяясь через каждые $T$ шагов.

***Решение:*** Заметим, что число узлов внутри прямоугольника конечно и из каждого узла шарик может выезжать не более чем в четырёх направлениях. То есть у шарика есть всего не более чем $4(n+1)(m+1)$ состояний, отсюда в какой-то момент шарик попадёт в состояние, в котором он уже был. Начиная с этого момента шарик будет ездить по одной и той же траектории вновь и вновь.

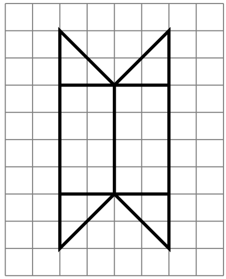
# Задача 3. Разрезай и властвуй

**A.** Разрежьте фигуру на рисунке **A** на 6 одинаковых частей.

***Решение:*** Смотреть рисунок.



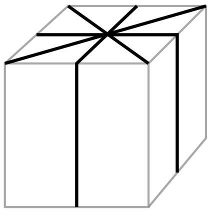
Пункт **A**



Пункт **B**

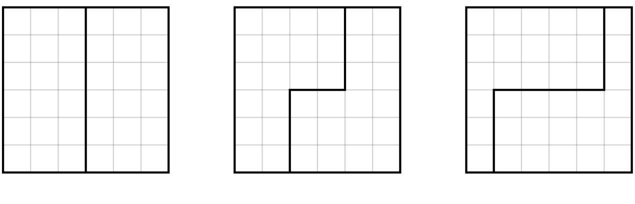
**B.** Как склеить куб из четырёх фигур, таких как на рисунке **B**?

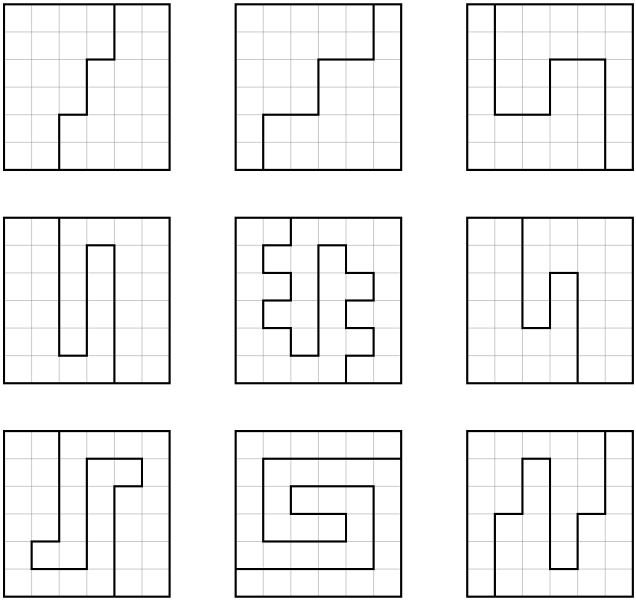
***Решение:*** Каждую фигуру согнём вдоль линий, указанных на рисунке выше. Тогда верхнюю и нижнюю грань куба можно будет «собрать» каждую из восьми треугольников, полученных при сгибании фигуры, а четыре боковые грани будут заклеены прямоугольниками, получившимися после сгибаний, как на рисунке ниже.



**C.** Предложите как можно больше разных способов разрезать квадрат $6 \times 6$ на два одинаковых многоугольника по линиям сетки.

***Решение:*** Легко получить достаточно много способов — как минимум 12 изображены на рисунке ниже.





# Задача 4. Ты школьник! — А может, ты школьник?

**А.** Известно, что школьники всегда лгут, а студенты всегда говорят правду. В комнате сидит 10 молодых людей, каждый из которых — школьник либо студент, причём присутствуют и те, и другие. Каждого из присутствующих попросили написать на бумажке, сколько он видит студентов вокруг себя. Были получены следующие ответы:

$$2,\ 7,\ 3,\ 3,\ 6,\ 6,\ 3,\ 5,\ 3,\ 5.$$

Так сколько же в комнате студентов?

***Решение:*** Пусть в комнате находится $k$ студентов. Тогда среди ответов, данных людьми в комнате, $k$ раз должно встречаться число $k-1$. Перебрав все ответы, данные людьми в условии этого пункта, понимаем, что подходит только

$$k = 4, \quad k - 1 = 3.$$

**B.** Известно, что все ответы, данные людьми в комнате, оказались различны. Как определить, сколько в комнате студентов?

***Решение:*** Если среди ответов есть число 0, то в комнате один студент. Если нулей нет — то и студентов тоже нет, так как иначе один из ответов должен повторяться, что противоречит условию.

**C.** Всегда ли по ответам, данным людьми в комнате, можно однозначно установить количество студентов среди присутствующих?

***Решение:*** Нет, не всегда: пусть была дана последовательность ответов

$$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 1001,\ 1002,\ 1003,\ 1004.$$

Тогда в комнате может быть как 4 студента, так и 6.

# Задача 5. Шутка

**A.** Стул с четырьмя ножками стоит 2000 рублей. Стул с двумя ножками стоит 4000 рублей. Стул с одной ножкой стоит 12000 рублей. Сколько стоит стул

- с 3 ножками;
- с 6 ножками;
- с 12 ножками;
- с 2019 ножками?

***Решение:*** Засчитывалась любая достаточно обоснованная мысль в рамках условия этой задачи. Один из возможных «чисто математических» методов решения — найти квадратичный полином, устанавливающий зависимость между количеством ножек стула и его ценой, значения которого в точках 4, 2, 1 соответствовали бы значениям в условии. Такой полином —

$$f(x) = 1000\left(\frac{7}{3}x^2 - 15x + \frac{74}{3}\right).$$

**B.** Каких цифр больше в двоичной записи чисел от 0 до 222 — единиц или двоек?

***Решение:*** В двоичной записи отсутствуют двойки, поэтому, разумеется, единиц больше.

**C.** Братья Андрей и Миша Ивановы играют в игру. Андрей загадывает число $n$, имеющее ровно 7 простых делителей. Миша придумывает гладкое пятимерное многообразие, описываемое формулой степени не более чем $n^2$. Андрей указывает 5 точек на этом многообразии и объявляет длины не более чем 7 отрезков, соединяющих эти точки в пространстве $\mathbb{R}^{25+1}$. Если выбранные точки вместе с указанными Андреем отрезками образуют второпорядково жёсткую структуру, то побеждает Миша. В противном случае мальчики меняются местами: Андрей придумывает другое гладкое многообразие, проходящее через эти пять точек, и Миша указывает пять точек на нём. Игра продолжается, пока либо у кого-то из мальчиков не получилась жёсткая структура, либо не прошло 1003 хода — тогда побеждает Миша. В зависимости от $n$ назовите фамилию победителя при правильной игре. Ответ объясните.

***Решение:*** Первое, что следует заметить, прочитав условие задачи, — в нём действительно описана *конечная* игра, которая длится не более 1003 ходов. Это значит, что победитель обязательно будет. Вне зависимости от того, кто конкретно это из братьев, его фамилия Иванов.

# Задача 6. Редактирование генома—1

Как известно, ДНК представляет из себя строку из четырёх букв: A, C, G и T. Важный вопрос — какие подстроки входят в данную строку (это говорит учёным о том, какие у данного существа есть гены).

В этой задаче мы будем рассматривать произвольные подстроки, в том числе и пересекающиеся. Например, в строку AGGAAAGGAGT подстрока AA входит два раза: с 4 и с 5 символа (да, эти вхождения частично пересекаются). Однако в строку AGA подстрока AA не входит ни разу (поскольку в исходной строке нет двух букв A рядом).

**A.** В ДНК некоторого животного есть такой фрагмент:

AGGGATAGCTGCTAGCT.

Сколько раз подстроки GG и GCT входят в него?

***Решение:*** Решение этого пункта можно получить, просто посчитав подстроки вручную (более того, авторам не известен более изящный способ). При этом получается следующий ответ: GG — 2 раза, GCT — 3 раза.

**B.** В данном пункте мы разрешим иметь не более двух ошибок при сравнении строки и подстроки. В строку AAAAC подстрока AACC входит два раза: с двумя ошибками с первого символа, и с одной ошибкой — со второго. Сколько раз подстроки GG и AGCT входят в фрагмент AGGGATAGCTGCTAGCT, если мы разрешаем иметь не более двух ошибок?

***Решение:*** GG при двух ошибках — это абсолютно любая двухбуквенная подстрока. Фрагмент кода имеет длину 17 букв, потому она входит в него 16 раз.

AGCT — ответ опять же можно посчитать руками, получится 5 раз (позиции 0, 2, 6, 9, 13). Упрощает дело то соображение, что все буквы в подстроке AGCT разные, поэтому она не может входить во фрагмент в двух соседних позициях.

**C.** Теперь мы допускаем не только ошибки при сравнении, но и добавления и удаления символов. Например, в строку AGT подстрока ACTT входит с двумя изменениями: можно удалить символ C и заменить первый T на G. Сколько раз подстроки AGCT и ACGT входят в фрагмент AGGGATAGCTGCTAGCT, если мы разрешим иметь до двух изменений при сравнении?

Мы будем считать вхождения различными, только если они начинаются с разных позиций в строке. Скажем, подстрока T входит не более чем с одним изменением в строку AT два раза, хотя мы можем прочесть её в строке как минимум тремя способами.

***Решение:*** AGCT входит с позиций

$$0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 —$$

начиная с любого места, кроме первой буквы G.

ACGT входит с позиций

$$0, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15.$$

# Задачи 5 класса

## Задача 1. Конференция анонимных геометров

**A.** В комнату, имеющую форму правильного 12-угольника, заходят 124 любителя вычислительной геометрии. Как рассадить их вдоль стен этой комнаты так, чтобы у каждой стены сидело ровно по 11 любителей вычислительной геометрии?

Любителей геометрии можно сажать и в углы комнаты — но не более чем по одному геометру на угол.

***Решение:*** $12 \cdot 11 - 124 = 8$. Это значит, что в какие-то 8 углов из 12 надо будет посадить геометров.

**B.** Организатор конференции по вычислительной геометрии арендовал комнату, имеющую форму правильного $n$-угольника, и хочет разместить геометров на конференции вдоль стен комнаты так, чтобы вдоль каждой стены сидело ровно по $k$ геометров. Какое количество участников он может пригласить на конференцию?

Перечислите все возможные ответы и докажите, что других нет.

***Решение:*** Если ни одного геометра не сидит в углах, нужно $nk$ участников. Если в каждом углу сидит по геометру, нужно $nk-n$ геометров. Откуда на конференции может быть любое число участников от $nk - n$ до $nk$ включительно.

**C.** Пусть комната, которая арендована для конференции по вычислительной геометрии, имеет форму куба, а участников конференции можно размещать не только на полу, но и на стенах и даже на потолке. Организатор хочет, чтобы на каждой грани куба находилось по $k$ любителей вычислительной геометрии.

В каждую вершину куба можно посадить не более одного любителя вычислительной геометрии, а на каждое ребро куба — неограниченное количество любителей этой науки. Какое количество участников организатор может пригласить на конференцию?

***Решение:*** Пусть ни на рёбрах, ни в вершинах нет геометров — тогда их $6k$, это максимально возможное количество.

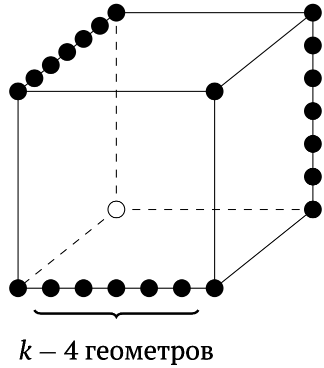
Теперь попробуем найти минимально возможное количество геометров. Пусть все вершины (их восемь) заняты геометрами — тогда они занимают 24 «места» на гранях (потому что к каждой вершине куба прилегает по 3 грани). Остальным геометрам, соответственно, осталось занять $6k - 24$ места. Если сажать всех геометров на рёбра, для этого потребуется

$$\frac{6k-24}{2} \quad \text{геометров.}$$

Прибавим к этому 8 геометров, которые уже сидят в вершинах — получится

$$3k - 12 + 8 = 3k - 4 \quad \text{геометров —}$$

таким образом, меньшее количество геометров не сможет обеспечить нам ровно $k$ человек на каждой грани. Покажем, как рассадить $3k - 4$ человека в соответствии с условием задачи (смотреть рисунок): на три несмежных ребра нужно посадить по $k-4$ геометров между вершинами.




## Задача 2. Пересадка на Гамбург

**А.** На прямой расположены четыре города: А, затем Б, затем В, затем Г. В городе А расположен большой вокзал, с которого отправляются поезда в остальные города. В соответствии со стандартом железной дороги, каждые 20 минут должен ходить поезд, соединяющий А и Б, каждые 80 минут — А и В, каждые 100 минут — А и Г.

При этом, если из А отправляется поезд в более далёкий город, он останавливается и во всех более близких городах: если поезд соединяет А и Г, то он также считается соединяющим А и Б.

Известно, что в полночь из А отправляется поезд в Г (он пройдёт через все города). Составьте расписание движения поездов (время отправления и пункт назначения каждого поезда) с полуночи до шести утра.

***Решение:***

| | | |
|---|---|---|
| 0:00 — Г | 2:00 — Б | 4:20 — Б |
| 0:20 — Б | 2:20 — Б | 4:40 — Б |
| 0:40 — Б | 2:40 — В | 5:00 — Г |
| 1:00 — Б | 3:00 — Б | 5:20 — В |
| 1:20 — В | 3:20 — Г | 5:40 — Б |
| 1:40 — Г | 3:40 — Б | 6:00 — Б |
| | 4:00 — В | |

**B.** Пусть поезд из А в Б должен ходить каждые 15 минут, поезд из А в В — каждые 45 минут, поезд из А в Г — каждые 105 минут. Опять же, в полночь из А отправляется поезд в Г, который пройдёт через все города.

Посчитайте, сколько поездов отправится из А за сутки.

***Решение:*** Заметим, что все числа в задаче делятся на 15, поэтому из А попросту каждые 15 минут будет уходить по поезду. Значит, за сутки отправится

$$24 \cdot 4 = 96 \quad \text{поездов.}$$

**C.** Пусть поезд из А в Б должен ходить каждые $m$ минут, поезд из А в В — каждые $n$ минут, поезд из А в Г — каждые $k$ минут; при этом числа $m$, $n$ и $k$ взаимно просты. Посчитайте, сколько поездов отправится из А за первые $nmk$ минут после полуночи, если в полночь из А отправляется поезд, проходящий через все города.

***Решение:*** Из А в Б отправится $mnk/m = nk$ поездов. Из А в В отправится $mnk/n = mk$ поездов, но какие-то из них посчитаны как поезда, идущие в Б — а именно отходящие в минуты, кратные $mn$. Таких $mnk/mn$. Добавив к этому поезда, идущие в Г, и вычтя из них те, которые ранее были подсчитаны в Б или в В, получаем

$$mnk \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} - \frac{1}{mn} - \frac{1}{mk} - \frac{1}{nk}\right).$$

Однако поезд, который идёт в Г в минуты, номер которых делится на $mnk$, был посчитан трижды и вычтен тоже трижды.

Поэтому его необходимо отдельно добавить обратно. Получается окончательный ответ:

$$mnk \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} - \frac{1}{mn} - \frac{1}{mk} - \frac{1}{nk} + \frac{1}{mnk}\right).$$

Заметим, что решение данной задачи является частным случаем применения *формулы включений и исключений* — мы посчитали мощность объединения нескольких множеств как сумму их мощностей, к который были прибавлены или вычтены мощности пересечений некоторых из них.

## Задача 3. Шутка

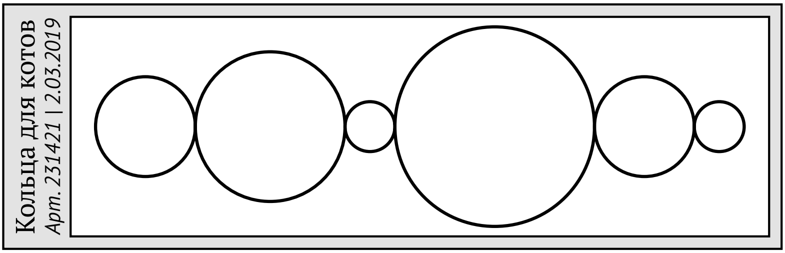
Смотреть 4 класс, задачу №5.

## Задача 4. Это кто? Это кот

**A.** В деревне Горка живёт 6 котов и 14 человек. Каждый кот ходит за едой к одному или нескольким людям, которых он называет своими «хозяевами». Кот тем более сыт и счастлив, чем большее количество людей он посещает. Каково наименьшее возможное количество «хозяев» у самого счастливого и сытого кота?

***Решение:*** При составлении задачи подразумевалось, что к каждому человеку ходит хотя бы один кот. В таком случае ответ 3, потому что иначе, если у самого счастливого кота меньше 3 хозяев, все коты могут посетить не более 12 человек. Но так как в условии не написано, что каждого человека кто-то посещает, ответ на *такую* задачу — ноль человек.

**B.** В ветеринарном магазине продаются наборы для кольцевания котов. Набор представляет из себя несколько колец, лежащих в коробочке, с левого края которой указаны название товара и дата выпуска (разумеется, если в наборах одни и те же кольца лежат в разном порядке, такие наборы считаются разными). При этом известно, что диаметр каждого кольца — целое число сантиметров (причём кольца не обязаны быть одинаковыми) и сумма диаметров колец равна 13 см.




Сколько различных наборов может продаваться в магазине?

***Решение:*** Ответ — $2^{12}$: каждая сантиметровая отметка может являться или не являться границей двух колец.

**C.** Несколько котов лезут на дерево. У дерева есть ветки, листья (растут на концах веток) и *узлы* — места, где одна ветка разделяется на две веточки. Докажите, что узлов у такого дерева ровно на один меньше, чем листьев.

***Решение:*** Индукция по сложности дерева. У простейшего непустого двоичного дерева 1 узел и 2 листа. Чтобы получать из него более сложные деревья, мы можем приклеивать в имеющиеся листья «галочки». Галочка заменяет один лист на узел и добавляет два листа — таким образом увеличивая количество и листьев, и узлов на 1.

# Задача 5. Я человек простой

**A.** В школе, где учится Стас, детям ставят только оценки от 2 до 5. Стас пришёл домой, и мама решила узнать у него, какие оценки он получил в школе. Но Стасу его успехи не очень нравятся, поэтому вместо списка оценок он назвал маме их произведение.

Может ли Стас скрыть от мамы полученную в школе тройку?

***Решение:*** Нет, потому что тройка — простое число. Если произведение оценок делится на 3, то среди них есть тройка. Если не делится, то тройки нет.

**B.** Может ли мама однозначно восстановить полученные Стасом оценки, зная только их произведение?

***Решение:*** Нет, потому что $2 \cdot 2 = 4$ — это пример неоднозначности.

**C.** На следующий день Стас был в более радостном расположении духа, поэтому назвал маме не только произведение полученных им оценок, но и их среднее арифметическое. Может ли мама теперь однозначно восстановить оценки?

***Решение:*** Да, потому что все оценки, кроме двойки и четвёрки — простые числа. Это значит, что их можно однозначно восстановить, разложив произведение всех оценок на простые множители; после этого останется только разложить какую-то степень двойки в произведение двоек и четвёрок. Это можно будет сделать однозначно, потому что при замене 4 на $2 \cdot 2$ строго уменьшается среднее арифметическое оценок.

## Задача 6. Мы едем, едем, едем, едем, едем, едем…

**A.** Проездной на месяц позволяет его владельцу ездить на метро неограниченное число раз, стоимость проездного фиксирована и одинакова в любом месяце. Укажите, какова должна быть стоимость проездного, чтобы при двух ежедневных поездках он не окупался бы в феврале (28 дней), но окупался бы в октябре (31 день)? Стоимость разовой поездки в метро равна 45 рублям.

***Решение:*** Строго больше, чем $28 \cdot 45 \cdot 2 = 2520$, но строго меньше, чем $31 \cdot 45 \cdot 2 = 2790$.

**B.** Стоимость строительства дороги равна её длине в километрах, умноженной на стоимость строительства одного километра. В свою очередь, строительство одного километра дороги стоит $a$ миллионов рублей.

Стоимость строительства одного аэропорта равна $b$ миллионам рублей. При каком расстоянии между двумя городами построить дорогу для их соединения окажется дороже, чем построить два аэропорта рядом с этими городами?

***Решение:*** На стоимость двух аэропортов можно построить в точности $2b/a$ километров дороги. Если расстояние между городами больше, строить аэропорты становится выгоднее.

**C.** Стоимость билета из А в Б составляет $a$ рублей. Однако билет из А в В стоит $b$ рублей, из В в Б стоит $c$ рублей, и $a > b + c$. Проблема в том, что в городе В надо сменить аэропорт и переночевать, это обойдётся вам в НОД $(b, c)$ рублей. Приведите примеры, когда прямой проезд из А в Б будет дешевле проезда с пересадкой через В, и когда он окажется дороже проезда с пересадкой, или докажите, что какого-то из вариантов не бывает.

***Решение:*** Пусть $b = 12$, $c = 15$. Тогда их НОД равен трём, и стоимость дороги с пересадкой равна 30. Тогда $a = 32$ будет примером, когда с пересадкой дешевле, а $a = 29$ — когда без пересадки дешевле.

# Задачи 6 класса

## Задача 1. Велопоход—2019

**A.** Девочка Саар едет на велосипеде из Брюсселя во Владивосток. За июль она планирует добраться от Оша до Бишкека. Ей встретились двое путников из России, которые сказали, что ей придётся преодолеть 8 бродов, прежде чем она приедет в Бишкек. На что она ответила путникам, что если они едут в Ош, то им нужно преодолеть в полтора раза больше бродов.

Потом Саар задумалась и сказала: «А если бы всё было наоборот и вам оставалось 8 бродов, а мне в полтора раза больше, мы бы встретились около красивых развалин XIV века». Сколько бродов назад Саар проезжала мимо развалин?

***Решение:*** Сейчас Саар осталось 8 бродов, а путникам — $8 \cdot 1.5 = 12$. Значит, в противоположной ситуации, около развалин, Саар оставалось 12 бродов, а путникам оставалось бы 8. С того момента прошло $12 - 8 = 4$ брода.

**B.** В августе Саар планирует доехать от Бишкека до Астаны. Она проехала уже 1210 километров. Сверившись с картой, она поняла, что ей осталось ехать втрое больше, чем расстояние, которое проедет машина, в 4 раза более быстрая, чем Саар, за время от текущего момента до момента, когда Саар останется столько же, сколько она проехала сейчас.

Каково расстояние между Бишкеком и Астаной?

***Решение:*** Пусть Саар осталось проехать $t$ километров. До момента, когда ей останется ехать столько же, сколько она уже проехала, надо ехать $t - 1210$ километров. За время, за которое Саар проедет эту дистанцию, машина успеет проехать $4 \cdot (t - 1210)$ километров. Значит, Саар осталось проехать

$$12 \cdot (t - 1210) \quad \text{километров.}$$

Получаем

$$t = 12(t - 1210), \quad 11t = 12 \cdot 1210,$$

$$t = 12 \cdot 110 = 1320.$$

Отсюда расстояние между Бишкеком и Астаной равно $1320 + 1210 = 2530$ километров.

**C.** Замените числа 1210 и 4 в условии пункта **B** на какие-то другие так, чтобы ответ в задаче составил 1400 километров — настоящее расстояние между Бишкеком и Астаной.

***Решение:*** По условию, мы можем менять расстояние, которое уже проехала Саар, и отношение скоростей Саар и машины. Обозначим первое за $A$, второе за $c$. Попробуем решить задачу с этими параметрами — у нас получится уравнение

$$t = 3c \cdot (t - A),$$

из которого

$$t = \frac{3cA}{3c - 1}.$$

Теперь мы можем выразить через $c$ и $A$ расстояние между Бишкеком и Астаной:

$$A + t = A + \frac{3cA}{3c - 1} = A \cdot \frac{6c - 1}{3c - 1}.$$

Таким образом, ответом на задачу является любая пара чисел $A$, $c$ такая, что

$$A \cdot \frac{6c - 1}{3c - 1} = 1400.$$

Приведём конкретный пример. Возьмём $A = 100$, тогда подойдёт

$$c = \frac{13}{36}.$$

# Задача 2. Редактирование генома—1

Смотреть 4 класс, задачу №6.

# Задача 3. Ты школьник! — А может, ты школьник?

Смотреть 4 класс, задачу №4.

# Задача 4. Воздушное пространство

**А.** Есть четыре города, будем называть их А, Б, В, Г. Известно, что рейс из Б в В длится столько же, сколько из А в Б, а рейс из Г в Б длиннее его в два раза. Рейс из В в Г, наконец, в 4 раза длиннее, чем рейс из А в Б. Не напутали ли чего-то составители карты рейсов?

***Решение:*** Заметим, что рейс из В в Г с пересадкой в Б будет всего в три раза длиннее рейса из А в Б, в то время как прямой рейс из В в Г почему-то в 4 раза длиннее. Это невозможно объяснить рационально: даже если самолёт, вылетев из В долетит до Б и потом полетит до Г — даже в этом случае получится только в 3 раза длиннее.

Однако возможны варианты: слишком длинные рейсы (необходимость посадки), разрешения государств на пролёт и тому подобное. При надлежащем обосновании ответ «да» на эту задачу возможен.

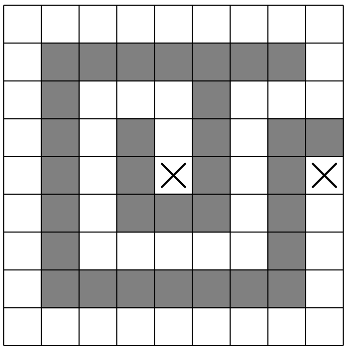
**В.** Остров Второго Марта представляет из себя квадрат $9 \times 9$, в центре которого находится генеральный штаб синих воинов. В самой правой клетке средней строчки находится порт, в который прибывает снабжение для синих воинов. Какие-то из квадратиков острова заняты бирюзовыми воинами; над этими квадратиками самолётам синих летать запрещено.

Длина кратчайшего возможного маршрута из штаба в порт равна 4 клеткам. Какие квадратики должны занять бирюзовые воины, чтобы кратчайший рейс из штаба в порт имел длину не менее 10 клеток? Самолётам запрещено летать из квадратика в квадратик по диагонали — можно перелетать только в квадратики, соседние с данным по стороне.

***Решение:*** Любая разумная закраска квадратов подойдёт. Один из примеров такой закраски приведён в пункте **C**.

**C.** По-разному располагая на карте бирюзовых воинов, какой наибольшей длины кратчайшего рейса из штаба в порт можно добиться?

***Решение:*** Наибольшая возможная длина рейса будет никак не меньше, чем длина «спирали», равная 48 (47 клеток между первой и последней):



Это же был самый длинный рейс, построенный участниками олимпиады — поэтому данный пример оценивался в 9 баллов. Остальные решения оценивались исходя из того, насколько их авторы приблизились к длине рейса в 48 клеток.

# Задача 5. Конференция анонимных геометров

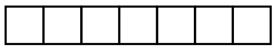
Смотреть 5 класс, задачу №1.

# Задача 6. Шутка

Смотреть 4 класс, задачу №5.

# Задача 7. Благоприятно влияет на безопасность во дворах

**A.** Будем называть *этажом на 1 квартиру* кубик $1 \times 1 \times 1$. Этаж на $k+1$ квартир отличается от этажа на $k$ квартир двумя кубиками $1 \times 1 \times 1$, расположенными по бокам этажа.



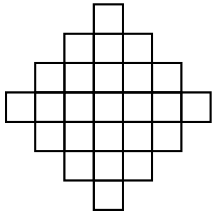
Этаж на 4 квартиры

Из скольки кубиков состоит этаж на $n$ квартир?

***Решение:*** $2n - 1$ квартира. Для проверки можно сначала подставить в формулу единицу, а затем понять, что значения выражения для $n$ и для $n + 1$ отличаются на два.

**B.** Из этажей строятся многоэтажки. *Многоэтажка серии 1* состоит из одного этажа на одну квартиру. Многоэтажка серии $n$ состоит из этажей

– на 1 квартиру;<br>
– на 2 квартиры;<br>
– на 3 квартиры;<br>
. . .<br>
– на $n - 1$ квартиру;<br>
– на $n$ квартир;<br>
– на $n - 1$ квартиру;<br>
. . .<br>
– на 1 квартиру.



Многоэтажка серии 4

Из скольки кубиков состоит многоэтажка серии $n$?

***Решение:*** Многоэтажка состоит из нижней диагонали, в которой $n$ кубиков, и $n-1$ диагонального уровня, в каждом из которых

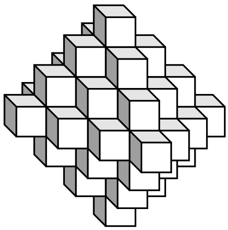
$$n + n - 1 = 2n - 1 \quad \text{кубиков.}$$

Получается, в многоэтажке

$$n + (n-1)(2n-1) = 2n^2 - 2n + 1 \quad \text{кубиков.}$$

Простая проверка показывает, что этот ответ верный.

**C.** Микрорайон первого губернатора состоит из одной многоэтажки серии 1. Микрорайон $n$-ого губернатора включает в себя одну многоэтажку серии $n$ и по две многоэтажки каждой из младших серий.



Микрорайон четвёртого губернатора

Из скольки единичных кубиков состоит микрорайон четвёртого губернатора? Пятого губернатора? $n$-ого губернатора?

***Решение:*** Посчитаем сразу для $n$:

$$2\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2 - 2k + 1\right) - 2n^2 + 2n - 1 =$$
$$= 2n - 2n(n+1) + \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - 2n^2 + 2n - 1 =$$
$$= \frac{4}{3}n^3 - 2n^2 + \frac{8}{3}n - 1.$$

Что интересно, это выражение действительно целое при любом $n$ и выдерживает проверку на малых значениях $n$.

## Задача 8. Розеттский камень

Смотреть 4 класс, задачу №1.

# Задачи 7 класса

## Задача 1. Оптимальные траты

**A.** Небольшой городок Оптимальск-на-Туломе снабжают электричеством две угольных электростанции. Первая из них, угольная электростанция старой модели, сожгла в прошлом месяце 4 тонны угля и произвела 10 мегаватт-часов электроэнергии. Вторая же, угольная электростанция новой модели с турбонаддувом, сожгла 11 тонн угля и произвела 36 мегаватт-часов электроэнергии.

У мэра города появилось дополнительно 127 тонн угля. С какой из электростанций ему стоит заключить дополнительный договор, чтобы выработать большее количество электричества? Сколько электричества будет выработано из этого угля?

***Решение:*** Найдём энергоэффективности каждой из электростанций. Энергоэффективность первой — $10/4$ МВтч/т, второй — $36\,/11$ МВтч/т.

$$\frac{10}{4} = \frac{110}{44} < \frac{144}{44} = \frac{36}{11}.$$

Вторая электростанция более экономична, поэтому контракт следует заключить с ней. При этом получится

$$127 \cdot \frac{36}{11} \quad \text{МВтч электричества.}$$

**B.** В городке Оптимальске-на-Туломе есть фабрика деревянных табуреток, а на ней — два цеха. Первый цех делает всю продукцию непосредственно из стандартных досок, выпиливая все необходимые части самостоятельно (2 табуретки получаются из 1 погонного метра стандартной доски), а второй цех — из досок и из калиброванных деревянных палок (из 1 погонного метра стандартной доски и 4 погонных метров калиброванных палок получается 4 табуретки).

Доски у давнего партнёра фабрики — лесопромышленного комбината «Вайда-Губа» — стоят 6000 рублей за метр, а калиброванные палки — 1000 рублей за метр. Комбинат продаёт только целое количество метров своей продукции, но фабрика может самостоятельно распилить доски и отдать цехам получившиеся части (не обязательно с целыми длинами). Тем не менее, цеха могут произвести только целое количество табуреток.

У фабрики на счету есть 48000 рублей, сколько метров досок и палок следует закупить на них, чтобы сделать максимальное количество табуреток? Сколько тогда получится табуреток?

***Решение:*** Если говорить неформально, то можно заметить, что расходы первого цеха равны

6000 рублей / 2 табуретки
60000 рублей / 20 табуреток
3000 рублей / 1 табуретка

Расходы второго —

10000 рублей / 4 табуретки
100000 рублей / 40 табуреток
2500 рублей / 1 табуретка

Дальше можно было бы заметить, что $2500 < 3000$, потому сумму надо отдать второму цеху. Но, к сожалению, второй цех не может потратить 48000 рублей, а только 40000, и 8000 останутся неизрасходованными, то есть это решение, возможно, окажется неоптимальным. Поэтому надо распределять работу между цехами.

Можно заметить, что 40000 рублей второй цех может потратить без остатка, поэтому, наверно, дать ему эту сумму будет выгодно, остающиеся же 8000 рублей отдать первому цеху — это даст 18 табуреток. Однако, нам требуется доказательство оптимальности.

Воспользуемся самым понятным (хотя не самым коротким) способом доказательства — переберём возможную загрузку цехов. За основу возьмём потребность второго цеха в палках (обозначим её $p$) — в зависимости от неё мы можем вычислить остальные параметры:

1. потребность 1 цеха в досках ($0.25 \cdot p$);
2. остающиеся 2 цеху доски ($\frac{48000-2500p}{6000}$)

| Палки, метров | доски, метров 1 цех | доски, метров 2 цех | всего табуреток | расходы |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 5 | 0 | 20 | $> 48000$ |
| 16 | 4 | 1 | 18 | 46000 |
| 12 | 3 | 3 | 18 | 48000 |
| 8 | 2 | 4 | 16 | 44000 |
| 4 | 1 | 6 | 16 | 46000 |
| 0 | 0 | 8 | 16 | 48000 |

В конце рассмотрения отметим, что если бы второй цех мог произвести 2 табуретки из половины метра доски и двух метров палок, то тогда мы могли бы произвести 19 табуреток (второй цех — 18 табуреток, первый цех — 1 табуретка).

**C.** ЛПК «Вайда-Губа» из-за повышенного спроса на свою продукцию отныне отгружает доски и палки только кусками с длиной, кратной 10. Определите в этих новых условиях, какое максимальное количество табуреток можно изготовить на 160000 рублей, как при этом распределятся затраты на доски и палки, и как распределится план работы между цехами. А на 760000 рублей?

***Решение:***

Если поручить всю работу второму цеху, получим 64 табуретки ($64 = \frac{160000}{2500}$). Для этого потребуется 16 метров доски и 64 метра палок. Однако купить мы можем либо 10, либо 20 метров — попробуем оба варианта.

При 10 метрах получится $10 \cdot 4 = 40$ табуреток и останется 6000 неизрасходованных рублей. При 20 метрах на палки останется 40000 рублей, то есть второй цех произведёт 40 табуреток, и 10 метров доски достанутся первому цеху, что даст ещё 20 табуреток.

Понятно, что хоть сколько-то метров доски покупать необходимо, а 30 метров доски не позволяет купить бюджет. Поэтому эти случаи рассматривать смысла нет.

Второй вопрос: $304 = \frac{760000}{2500}$, 76 метров доски. При покупке 70 метров останутся неизрасходованные 60000 рублей, при покупке 80 метров мы можем купить только 280 метров палок, что даёт $280 + 10 \cdot 2 = 300$ табуреток. Дальнейшее увеличение длины покупаемых досок только уменьшит длину покупаемых палок и отберёт больше работы у второго цеха в пользу первого.

Итого: 60 и 300 табуреток.

# Задача 2. Меняем правила под себя

**А.** В кучке лежит 20 камней. За ход из неё можно вынуть

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8 \quad \text{камней.}$$

Играют двое, и проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

***Решение:*** Выигрывает первый. Первым ходом он может взять 2 камня, а затем добиваться того, чтобы после его хода количество оставшихся камней непременно делилось на 6.

Тогда после хода второго количество камней делиться на 6 никак не может (6 брать нельзя), и ноль может получиться только у первого игрока.

Как дополнять ходы второго до числа, делящегося на 6?

| Ход | Реакция |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 4 |
| 3 | 3 |
| 4 | 2 |
| 5 | 1 |
| 7 | 5 |
| 8 | 4 |

**B.** В кучке $N$ камней. За ход из неё можно вынуть

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 11,\ 12,\ 14 \quad \text{камней.}$$

(То есть любое число от 1 до 14, кроме 7 и 13.) По-прежнему играют двое, и проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре (в зависимости от $N$)?

***Решение:*** Второй выигрывает при $N$ вида $20k$ и $20k + 7$, в остальных случаях выигрывает первый.

Доказательство этому простое — число $N = 0$ имеет вид $20k$. Игрок, после хода которого количество оставшихся камней принимает вид $20k$ или $20k+7$, может добиваться того, чтобы после пары ходов количество оставшихся камней вновь принимало такой вид. Опишем, как это сделать.

Если количество камней имеет вид $20k$, игроку нужно получить 13 или 20 вынутых камней за два хода. Если количество камней имеет вид $20k+7$, то нужно получить 7 или 20 вынутых камней за два хода. Стратегия представлена в таблице ниже:

| Ход 1 | Ход 2 | $\sum$ 2 ходов |
|---|---|---|
| 1 | 12 | 13 |
| 2 | 11 | 13 |
| 3 | 10 | 13 |
| 4 | 9 | 13 |
| 5 | 8 | 13 |
| 6 | 14 | 20 |
| 8 | 12 | 20 |
| 9 | 11 | 20 |
| 10 | 10 | 20 |
| 11 | 9 | 20 |
| 12 | 8 | 20 |
| 14 | 6 | 20 |

| Ход 1 | Ход 2 | $\sum$ 2 ходов |
|---|---|---|
| 1 | 6 | 7 |
| 2 | 5 | 7 |
| 3 | 4 | 7 |
| 4 | 3 | 7 |
| 5 | 2 | 7 |
| 6 | 1 | 7 |
| 8 | 12 | 20 |
| 9 | 11 | 20 |
| 10 | 10 | 20 |
| 11 | 9 | 20 |
| 12 | 8 | 20 |
| 14 | 6 | 20 |

**C.** В кучке $N$ камней. За ход из неё можно вынуть

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ a-1,\ \cancel{a},\ a+1,\ \ldots,\ n \quad \text{камней.}$$

(То есть любое число от 1 до $n$, кроме $a$.) Играют двое, и проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре (в зависимости от чисел $N$, $n$, $a$)?

***Решение:*** Если число $a > \frac{n}{2}$, второй выигрывает при количестве камней $N$, кратном $a$, иначе выигрывает первый. Стратегия для игроков аналогична пункту **A**.

Если $a \leq \frac{N}{2}$, то второй выигрывает при $N$, имеющем вид

$$k \cdot (n+a+1) \quad \text{или} \quad k \cdot (n+a+1)+a.$$

Иначе выигрывает первый. Докажем это: убедимся, что игрок может добиться того, чтобы за два последовательных хода было вынуто

**1.** $n+a+1$ или $n+1$ камней,

**2.** $n+a+1$ или $a$ камней.

Это позволит игроку, после хода которого число камней в куче приняло указанный нами вид, поддерживать число камней именно такого вида в куче после каждого своего хода. Представим стратегию, как это можно делать:

| Ход 1 | Ход 2 | $\sum$ 2 ходов |
|---|---|---|
| $1$ | $n$ | $n+1$ |
| $2$ | $n-1$ | $n+1$ |
| | $\dots$ | |
| $a-1$ | $n-a+1$ | $n+1$ |
| $a+1$ | $n$ | $n+a+1$ |
| $a+2$ | $n-1$ | $n+a+1$ |
| | $\dots$ | |
| $n$ | $a+1$ | $n+a+1$ |

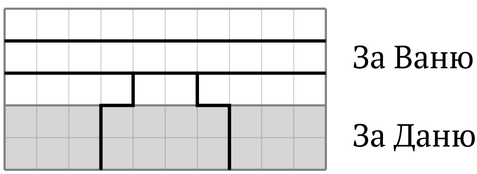
| Ход 1 | Ход 2 | $\sum$ 2 ходов |
|---|---|---|
| $1$ | $a-1$ | $a$ |
| $2$ | $a-2$ | $a$ |
| | $\dots$ | |
| $a-1$ | $1$ | $a$ |
| $a+1$ | $n$ | $n+a+1$ |
| $a+2$ | $n-1$ | $n+a+1$ |
| | $\dots$ | |
| $n$ | $a+1$ | $n+a+1$ |

## Задача 3. Аксиомы выборов

**А.** На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника более или менее известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

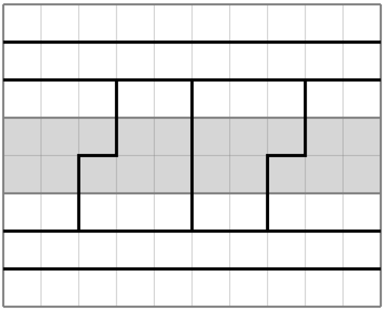
Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.



***Решение:*** Смотреть рисунок: при указанном разбиении Даню выберут в трёх группах из пяти.

**B.** В другой компании работают 80 человек, которые выбирают себе начальника из трёх кандидатов: по 30 человек голосуют за Мишу и Гришу, и 20 человек — за Гошу. Разделите работников на 8 групп по 10 человек, так чтобы большинство групп выбрало Гошу, и он победил на выборах.




***Решение:*** Смотреть рисунок: при указанном разбиении Гошу выберут в четырёх группах, на Мишу и Гришу придётся по две.

**C.** Пусть в компании работает $n \cdot k$ человек, которые выбирают себе начальника из двух кандидатур. Мы знаем, что первому кандидату отдают предпочтение $A$ человек, а второму — остальные $n \cdot k - A$ человек. При каких $A$ возможно разделить работников компании на $n$ групп размером по $k$ человек так, чтобы победил первый кандидат?

***Решение:*** Что такое *большинство* среди $n$ групп? Это, на самом деле,

$$\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \quad \text{групп.}$$

(Это можно понять, подставив в формулу чётное и нечётное значение $n$.) Аналогично, одна группа из $k$ человек выбирает данного кандидата, если в этой группе за него проголосовали не менее

$$\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \quad \text{человек.}$$

То есть для победы первого кандидата за него должны голосовать

$$A \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \quad \text{человек.}$$

# Задача 4. Девяносто десять

**A.** Сколько единиц присутствует в римской записи чисел от 1 до 100? Напомним, в римской системе счисления использовались цифры

I — один, V — пять, X — десять, L — пятьдесят, C — сто.

***Решение:*** Заметим, что количество цифр „I“ в записи числа однозначно определяется его последней десятичной цифрой.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| I | II | III | I | | I | II | III | I | |

Получается 14 единиц на десяток — и 140 на первую сотню.

**B.** Сколько двоек присутствует в записи чисел от 0 до $10^n - 1$? Ответ должен зависеть от $n$.

***Решение:*** Среди этих $10^n$ чисел имеется $10^{n-1}$ с двойкой, стоящей в последнем разряде, $10^{n-1}$ — с двойкой в предпоследнем разряде, ..., $10^{n-1}$ — с двойкой в старшем, $n$-ом, разряде. Отсюда ответ —

$$n \cdot 10^{n-1} \quad \text{двоек.}$$

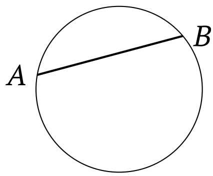
**C.** Кого больше в двоичной записи чисел от 0 до $2^n - 1$ — единиц или нулей? Ответ объясните.

***Решение:*** Каждое число начинается с единицы — а если забыть про единицу в начале числа, единиц и нулей останется поровну: замена всех единиц, кроме ведущей, на нули, а всех нулей на единицы — биекция рассматриваемого отрезка натуральных чисел в себя, поэтому единиц будет больше.

Другой способ решения этой задачи: рассмотрим все возможные комбинации из $n$ нулей или единиц. В их записи, очевидно, встретится равное количество единиц и нулей. Записи чисел получатся, если отбросить от комбинаций все ведущие нули — поэтому единиц останется больше.

## Задача 5. Хордовые?

*Хордой круга* называется отрезок, соединяющий две точки на окружности, ограничивающей этот круг.




**A.** Докажите или опровергните: в круге можно выбрать две хорды так, что нельзя провести третью хорду, вместе с которой картинка окажется симметричной относительно какой-либо оси.

***Решение:*** Утверждение из условия неверное: пусть в круге проведены две хорды — тогда рассмотрим диаметр, являющийся серединным перпендикуляром к одной из них, и отразим вторую хорду относительно него.

Либо получится новая хорда — тогда картинка из трёх хорд будет симметрична относительно взятого нами диаметра. Либо обе хорды были симметричны относительно этого диаметра — тогда возьмём его в качестве третьей хорды.

**B.** В центре клетчатого квадрата $21 \times 21$ стоит лампа. Два мотылька хотят закрыть свет лампы от всех остальных, кто находится вне клетчатого квадрата, чтобы она не светила никому, кроме мотыльков. Для этого они ставят непрозрачные столбы размером $1 \times 1$ в клетки квадрата. Выигрывает тот, после чьего хода за границы квадрата не попадёт ни одного луча лампы.

Кто из мотыльков победит при правильной игре?

***Решение:*** Выиграет второй: ему надо ставить очередной столб на позицию, получающуюся симметрией относительно центра квадрата из позиции, на которую свой столб только что поставил первый мотылёк. Возможность хода первого мотылька гарантирует возможность хода второго.

**C.** Братья Андреевы, Иван и Миша, играют в игру: они по очереди проводят хорды в круге. Первым ходит Иван. Может ли Миша вести игру так, чтобы после его хода круг всегда оказывался поделённым на нечётное число областей?

***Решение:*** Конечно: если после хода Ивана областей нечётное число, надо проводить новую хорду так, чтобы она пересекала ровно одну из предыдущих. Если областей чётное число, надо проводить хорду, не пересекающую ни одну из более ранних. Очевидно, что Миша всегда может так сделать.

# Задача 6. Разрезай и властвуй

Смотреть 4 класс, задачу №3.

# Задача 7. Шутка

**A.** Придумайте задачу и решите её! В условии обязательно должно фигурировать слово «стул», а в решении обязательно должно быть ровно одно арифметическое действие. Лучшие задачи будут продемонстрированы на награждении олимпиады.

**B.** Каких цифр больше в двоичной записи чисел от 0 до 222 — единиц или двоек?

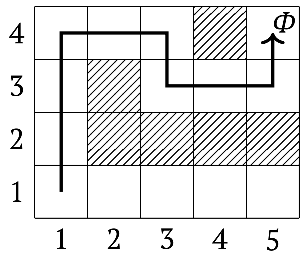
***Решение:*** В двоичной записи отсутствуют двойки, поэтому, разумеется, единиц больше.

**C.** Братья Андрей и Миша Ивановы играют в игру. Андрей загадывает число $n$, имеющее ровно 7 простых делителей. Миша придумывает гладкое пятимерное многообразие, описываемое формулой степени не более чем $n^2$. Андрей указывает 5 точек на этом многообразии и объявляет длины не более чем 7 отрезков, соединяющих эти точки в пространстве $\mathbb{R}^{25+1}$. Если выбранные точки вместе с указанными Андреем отрезками образуют второпорядково жёсткую структуру, то побеждает Миша. В противном случае мальчики меняются местами: Андрей придумывает другое гладкое многообразие, проходящее через эти пять точек, и Миша указывает пять точек на нём. Игра продолжается, пока либо у кого-то из мальчиков не получилась жёсткая структура, либо не прошло 1003 ходов — тогда побеждает Миша. В зависимости от $n$ назовите фамилию победителя при правильной игре. Ответ объясните.

***Решение:*** Первое, что следует заметить, прочитав условие задачи, — в нём действительно описана *конечная* игра, которая длится не более 1003 ходов. Это значит, что победитель обязательно будет. Вне зависимости от того, кто конкретно это из братьев, его фамилия Иванов.

## Задача 8. Лабиринт

План лабиринта представляет из себя прямоугольный кусок клетчатой бумаги размером $m \times n$ клеток. Будем сопоставлять каждой клетке две координаты, по горизонтали и по вертикали, как показано на рисунке.




Каждая клетка в лабиринте либо чистая (через соответствующий ей участок можно пройти), либо закрашенная (на местности соответствующий квадрат заполнен камнями, через него пройти нельзя). Также одна из чистых клеток отмечена буквой *Ф* — это *финальная* клетка, её можно узнать на местности.

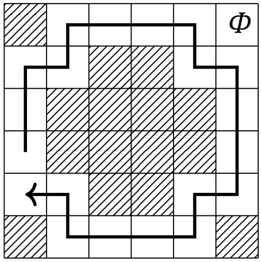
В этой задаче ходить из клетки можно вверх, вниз, вправо или влево, но не по диагонали.

Путём мы будем называть последовательность чистых клеток, в которой каждая следующая имеет общую сторону с предыдущей; и, кроме того, первая из которой находится в начальной клетке пути, а последняя — в финальной.

**А.** Путешественнику нужно пройти из произвольной клетки в лабиринте в верхнюю правую клетку $(m, n)$. Пусть он пользуется «правилом правой руки» — всегда выбирает первую дорогу из тех, что доступны, если перебирать их в порядке обхода против часовой стрелки (то есть, грубо говоря, самую правую). В частности, если путешественник зашёл в тупик, то он должен развернуться.

Приведите пример, когда он не сможет дойти до требуемой клетки $(m, n)$, несмотря на то, что путь в лабиринте до этой клетки есть.

***Решение:*** Рассмотрим лабиринт на рисунке ниже. «Правило правой руки» будет водить путешественника по кругу вдоль границы закрашенной части лабиринта в центре, и в финишную клетку он никогда не попадёт.




**B.** Пусть путник видит ситуацию вокруг (какие из соседних по стороне клеток заняты, а какие — свободны, и находится ли он в финальной клетке) и способен запомнить одно натуральное число. После каждого хода он может это число обновить. Ничего кроме этого числа он не способен запомнить (то есть он не запоминает маршрута, внешнего вида стен и прочего — попробуйте запомнить внешний вид хотя бы 1700 стен!). Может ли он, имея только эту информацию, дойти до финальной клетки лабиринта?

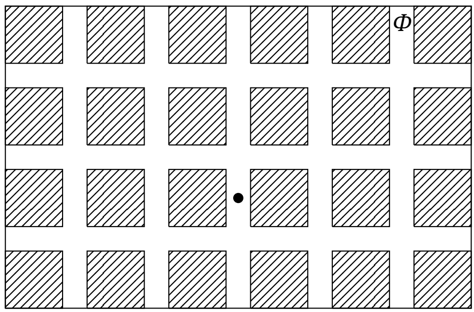
***Решение:*** Имея возможность запомнить натуральное число, можно запомнить любой текст (сохранив его в txt и прочитав последовательность нулей и единиц). Таким образом, путник может обойти все клетки лабиринта, используя поиск в глубину и запоминая конфигурацию посещённых им клеток: где располагались свободные клетки, а где стены. В конце концов он не только выйдет из лабиринта, но и получит полную карту той его части, через которую он прошёл в процессе.

**C.** Пусть путник видит ситуацию вокруг. Помимо этого, никакой другой информации и памяти у него нет, в частности, он не может запоминать никаких чисел. Существует ли какой-нибудь набор правил, чтобы он, имея только эту информацию, мог дойти до финальной клетки в любом лабиринте?

***Решение:*** По условию этой задачи поведение путника зависит только от ситуации, которую он видит вокруг себя — а именно, какие из четырёх клеток, соседних с его местоположением, заняты, а какие свободны.

Для того, чтобы у путника была мало-мальская возможность выйти из лабиринта, в некоторых простых ситуациях он должен вести себя предсказуемым образом: разворачиваться назад в тупиках и продолжать путь прямо, если свободны две клетки сзади и спереди него (иначе в лабиринте, где старт и финиш соединены длинным прямым «тоннелем», он будет стоять на месте и не дойдёт до финиша).

Рассмотрим следующий лабиринт: он состоит из тупиков и прямых проходов, поведение путника в которых понятно, и нескольких «перекрёстков», на каждом из которых поведение путника будет одним и тем же.




Если путник ходит прямо на таком перекрёстке, он будет ходить вниз и вверх по центральному проходу. Если поворачивает направо, будет ходить по часовой стрелке вокруг одного из заштрихованных квадратов. Если налево, также будет ходить вокруг одного из квадратов, но против часовой стрелки. Ни в одном из этих случаев до финишной клетки он не дойдёт.

# Задача 9. Простые, но не простые-простые

Натуральное число $m$ является *делителем* числа $n$, если существует натуральное $k$ такое, что

$$n = k \cdot m.$$

**A.** Придумайте число, у которого ровно 43 различных натуральных делителя.

***Решение:*** $2^{42}$.

**B.** Докажите, что для любого $n$ существует натуральное число $N$, у которого ровно $n$ различных натуральных делителей.

***Решение:*** $2^{n-1}$.

**C.** Приведите пример чисел $n$ и $k$ таких, что не существует натурального $N$, у которого ровно $n$ различных натуральных делителей, из которых ровно $k$ являются простыми.

***Решение:*** $n = 5$, $k = 18$. Ну и $n = 5$, $k = 4$ тоже подойдёт.

## Задача 10. Велопоход—2019

Смотреть 6 класс, задачу №1.

# Задачи 8 класса

## Задача 1. Широкий не значит высокий

**A.** Приведите пример двух треугольников, таких что

- Стороны первого треугольника — $a_1$, $a_2$, $a_3$;
- Стороны второго треугольника — $b_1$, $b_2$, $b_3$;
- $b_1 > a_1, \quad b_2 > a_2, \quad b_3 > a_3$;
- Но при этом площадь первого треугольника больше площади второго.

***Решение:*** Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 1, его стороны — $1, 1, \sqrt{2}$, а площадь равна $\frac{1}{2}$. Также рассмотрим равнобедренный треугольник с основанием длиной 1000 и высотой $\frac{1}{1\,000\,000}$. Его боковые стороны имеют длину

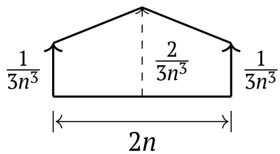
$$\sqrt{500^2 + (\tfrac{1}{1\,000\,000})^2} \approx 500.000000000000001$$

Таким образом, каждая из его сторон больше каждой из сторон первого треугольника. Однако его площадь равна

$$1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1\,000\,000} = \frac{1}{2000} < \frac{1}{2}.$$

**B.** Укажите, как для произвольного натурального числа $n$ построить $n$-угольник, все стороны которого имеют длину не меньше $n$ сантиметров, но при этом площадь этого многоугольника не превосходит $\frac{1}{n}$ см$^2$.

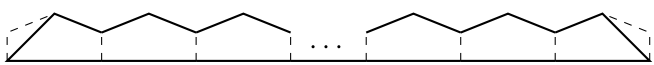
***Решение:*** Фиксируем натуральное число $n$ и рассмотрим следующий пятиугольник:




Его основание и верхние стороны, очевидно, имеют длину не меньше $n$, а его площадь равна

$$2n \cdot \frac{1}{3n^3} + n \cdot \frac{1}{3n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Пусть $n$ нечётно. Поставим друг к другу $\frac{n-1}{2}$ таких пятиугольников и «срежем лишние углы»:



Все стороны полученного многоугольника имеют длину не меньше $n$, а его площадь не превосходит

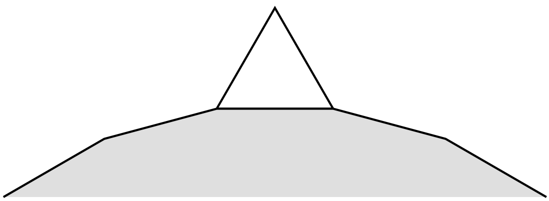
$$\frac{n-1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2n}.$$

Если $n$ чётно, построим такой многоугольник с $n+1$ стороной и заменим два соседних ребра из одного пятиугольника в верхней ломаной одним ребром. Площадь многоугольника при этом не возрастёт, а его стороны останутся достаточно длинными.

**C.** Докажите, что максимальная возможная площадь $n$-угольника, все стороны которого имеют длину 1, меньше, чем максимальная возможная площадь $n+1$-угольника, все стороны которого имеют длину 1.

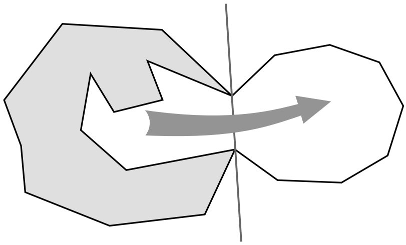
***Решение:*** Известный факт заключается в том, что наибольшую площадь среди всех многоугольников с $n$ сторонами единичной длины имеет правильный $n$-угольник. Тем не менее, доказательство этого факта вряд ли доступно среднему восьмикласснику, поэтому мы не будем им пользоваться. Мы пойдём самым «прямолинейным» путём — для каждого многоугольника с $n$ сторонами длины 1 построим многоугольник с $n+1$ сторонами, площадь которого больше.

Если многоугольник выпуклый, это просто: построим на одном из его рёбер равносторонний треугольник как на основании. Площадь многоугольника строго увеличится, а количество рёбер возрастёт на 1.



Иначе многоугольник невыпуклый. Тогда проведём касательную к нему, проходящую через две несмежных вершины. Пусть эти вершины разделяет $k$ сторон многоугольника, оказавшиеся между внешней частью его границы и проведённой нами касательной. Тогда расстояние между этими вершинами не превосходит $k$ сантиметров. Тогда мы можем построить выпуклый

$k+2$–угольник, $k+1$ сторона которого имеет длину 1, а длина оставшейся стороны равна расстоянию между выбранными вершинами (смотреть рисунок ниже).



Тогда рассмотрим многоугольник, в котором старые $k$ рёбер между выбранными вершинами заменены $k+1$ сторонами построенного выпуклого многоугольника. Его площадь очевидно больше, чем площадь исходного.

## Задача 2. С вами говорит капитан

**А.** Молодой лётчик Толя Метров устроился на работу в авиакомпанию *Raynair* и хочет научиться отличать жёсткую посадку от очень жёсткой. Скорость снижения самолёта измеряется в футах в минуту, но Толя, будучи, разумеется, приверженцем метрической системы, хочет перевести эту величину на свой лад.

Помогите ему — сколько футов в минуту содержит один метр в секунду? Один фут равен 30 см[1].

***Решение:*** Метр — это 100/30 футов. Соответственно,

$$\frac{1\,\text{м}}{1\,\text{с}} = \frac{\frac{100}{30}\,\text{фт}}{\frac{1}{60}\,\text{мин}} = 200\,\text{фт/мин}.$$

[1]Единица измерения *фут* имеет много вариантов точного значения, в задаче идёт речь про *метрический фут*. Однако обычно под футом понимают *международный фут*, равный 0.3048 м.

**B.** Самолёт падает. Его тень перемещается по земле со скоростью 400 км/ч, а угол наклона составляет $30^\circ$ носом вниз. Какова его скорость снижения (в фут/мин)?

***Решение:*** Логично предположить, что солнце находится в зените, и его лучи перпендикулярны земле. Если солнце светит под углом, то ответ надо будет домножить на коэффициент, зависящий от угла, в остальном же решение не изменится.

Скорость снижения самолёта составляет

$$400/\sqrt{3}\text{ км/ч} = \frac{400}{3.6\sqrt{3}}\text{ м/с.}$$

При переводе в футы в минуту получится

$$\frac{400\cdot 200}{3.6\sqrt{3}}\text{ фт/мин} = \frac{200000\sqrt{3}}{27}\text{ фт/мин.}$$

Это примерно 12830 фт/мин.

**C.** У самолёта в воздухе есть две важных характеристики: скорость относительно набегающей воздушной массы (будем обозначать её $v_{\text{TAS}}$) и скорость относительно земной поверхности (будем обозначать её $v_{\text{GS}}$).

Пусть $v_{\text{TAS}}$ равна 900 км/ч, а скорость ветра — 100 км/ч. Если ветер дует самолёту в хвост, то $v_{\text{GS}}$ будет составлять 1000 км/ч; если в нос — то 800 км/ч. А в каком направлении должен дуть ветер, чтобы

$$v_{\text{GS}} = v_{\text{TAS}} = 900\text{ км/ч?}$$

***Решение:*** Понятно, что вектор $v_{\text{GS}}$ — это векторная сумма $v_{\text{TAS}}$ и скорости ветра (обозначим этот вектор через $w$). Рассмотрим треугольник, сформированный тремя упомянутыми векторами. Он равнобедренный, со сторонами 900, 900, 100.

Это значит что ветер дует «немного в лицо» самолёту и угол между направлением носа самолёта и направлением ветра равен

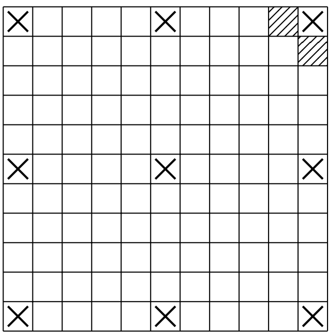
$$180^\circ - \arccos\left(\frac{50}{900}\right) \approx 93.185^\circ.$$

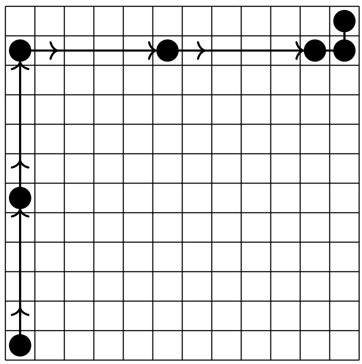
# Задача 3. Медленно запрягает, да быстро едет

**A.** Имеется клетчатый квадрат $11 \times 11$, в нижней левой клетке которого стоит фишка. Движениями фишки управляют Петя и Вася, первый ход делает Петя. Петя может сдвигать фишку на 1 шаг в любом направлении, а Вася — на целых 4 шага, но только в направлении, в котором был сделан предыдущий ход.

Выигрывает тот, после чьего хода фишка окажется в верхней правой клетке квадрата. Кто победит при правильной игре?

***Решение:*** Рассмотрим рисунок ниже слева. Если бы у Пети была возможность победить, за ход до его победы фишка должна бы была оказаться в одной из двух заштрихованных клеток. Однако те клетки, в которых фишка *на самом деле* может находиться перед ходом Пети, отмечены на рисунке крестиком (несложно убедиться, что других нет) — и ни одна из заштрихованных клеток крестиком не отмечена. Значит, Петя победить не может.





**B.** Условимся, что если Вася не может сделать свой ход в полной мере (то есть от положения фишки перед его ходом до стенки квадрата меньше 4 клеток), то он идёт прямо до последней клетки перед стенкой.

Пусть теперь имеется квадрат $12 \times 12$, а правила игры такие же, как пункте **A**. Кто победит при правильной игре?

***Решение:*** Побеждает Петя, стратегия для него изображена на рисунке выше справа.

**C.** Пусть при тех же правилах игры перед мальчиками лежит квадрат размером $n \times n$. Кто победит при правильной игре, в зависимости от $n$?

***Решение:*** Присвоим каждой клетке квадрата координаты по горизонтали и вертикали от 0 до $n-1$. Верхняя правая клетка имеет координаты $(n-1, n-1)$. Если $n$ даёт остаток 2 при делении на 5, Петя побеждает в игре, используя стратегию, аналогичную предложенной нами для пункта **B**.

Рассмотрим остальные значения $n$. Пусть у Пети есть стратегия, позволяющая победить в нашей игре. Тогда за ход до его победы фишка находилась в клетке

$$(n-2, n-1) \quad \text{или} \quad (n-1, n-2).$$

Без ограничения общности будем считать, что имел место второй вариант.

Докажем, что координата по вертикали фишки перед ходом Пети не может быть равна $n-2$. Рассмотрим последний раз, когда фишка перед ходом Пети находилась у горизонтальной стены. Если это была нижняя стена, то вертикальная координата положения фишки перед Петиным ходом должна непременно делиться на 5, а $n-2$ в нашем случае на 5 не делится.

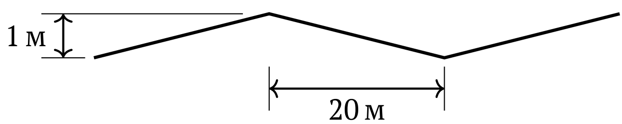
Если это была верхняя стена, то разность $n-1$ и вертикальной координаты фишки должна делиться на 5, что для $n-2$ также не выполняется. Что и требовалось доказать.

## Задача 4. Инфраструктура

**A.** Чтобы противодействовать наводнениям, судоходный канал перекрыт воротами, каждая из створок которых имеет ширину 150 метров. Обе створки открываются в направлении по течению канала. На сколько градусов оператору ворот нужно открыть створки, чтобы между ними образовался зазор шириной 150 метров, достаточный для прохода двух судов в направлении навстречу друг другу?

***Решение:*** Чтобы образовать канал шириной 150 метров, каждая створка должна открыться на 75 метров — значит, прямоугольный треугольник, который получится, если взять створку, проекцию её конца на берег канала и сам берег канала, будет иметь гипотенузу 150 метров и один из катетов длиной 75 метров. Значит, его острый угол — $30^\circ$, а створка ворот повернулась на $60^\circ$.

**B.** Известно, что провода над железной дорогой подвешиваются зигзагом, чтобы токоприёмники поездов меньше изнашивались:

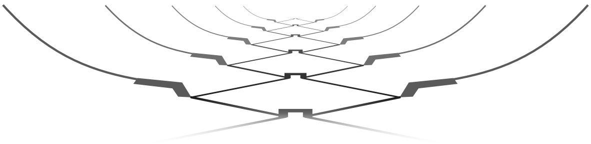



Пусть расстояние между соседними столбами равно 20 метрам, а расстояние между крайними положениями провода — 1 метр. Сколько метров такого провода нужно на электризацию одного километра железной дороги?

***Решение:*** Длина одного прямого отрезка провода равна $\sqrt{401}$ метра по теореме Пифагора. На километр железной дороги приходится 50 отрезков между столбами, то есть требуемая длина провода равна

$$50\sqrt{401} \approx 1001.249 \text{ метра.}$$

**C.** На некоторых других железных дорогах используется *ромбовидная подвеска*. Она выглядит так:

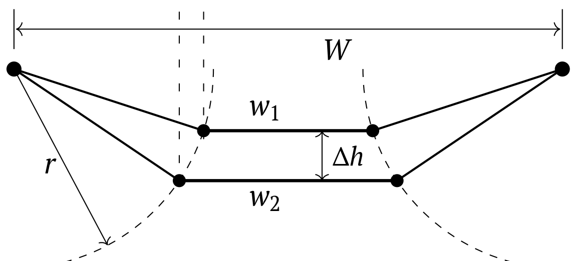


По бокам расположены несущие провода, на которых висит вся конструкция, а в центре — два провода под током, которые то сходятся, то расходятся.

Объясните, почему даже при растяжении проводов под током они не провисают, а продолжают оставаться ровными и горизонтальными (поэтому их не нужно дополнительно натягивать). Предложите способ посчитать, насколько ниже будут висеть провода, если провод под током растянется на некоторую величину.

***Решение:*** Мы можем считать, что длина коротеньких боковых проводов, которые поддерживают крайние точки проводов под током, не изменяется: ведь её изменение минимально по сравнению с изменением длины огромного хлыста провода под током, в котором не один десяток метров. Обозначим длину короткого бокового провода через $r$, см. рисунок ниже.

Это значит, что точка соединения провода под током и бокового провода при растяжении провода под током перемещается по дуге радиуса $r$.




Зная длину хлыста провода под током в зависимости от температуры и расстояние между столбами контактной сети, мы можем по теореме Пифагора найти $w_1$ и $w_2$ — ширину между крайними точками провода под током при более низком значении температуры и более высоком.

Далее, через $W$ обозначим расстояние между двумя точками подвески боковых проводов — это также параметр контактной сети, он должен быть известен. Отсюда можно вычислить расстояние по горизонтали от точки соединения проводов под током и бокового при разных значениях температуры — оно равно соответственно

$$\frac{W - w_1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{W - w_2}{2}.$$

Теперь, опять же, применив теорему Пифагора, найдём разницу между высотами подвешивания проводов, она будет равна

$$\Delta h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{W - w_2}{2}\right)} - \sqrt{r^2 - \left(\frac{W - w_1}{2}\right)}.$$

Если же мы теперь будем учитывать растяжение бокового провода — пусть его длина изменяется и равна $r_1$ при более низком значении температуры и $r_2$ при более высоком — формула также немного изменится:

$$\Delta h = \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{W - w_2}{2}\right)} - \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{W - w_1}{2}\right)}.$$

# Задача 5. Воздушное пространство

Смотреть 6 класс, задачу №4.

# Задача 6. Это кто? Это кот

Смотреть 5 класс, задачу №4.

# Задача 7. Аксиомы выборов

Смотреть 7 класс, задачу №3.

# Задача 8. Пересадка на Гамбург

Смотреть 5 класс, задачу №2.

# Задача 9. Шутка

Смотреть 7 класс, задачу №7.

# Задача 10. Меняем правила под себя

Смотреть 7 класс, задачу №2.

# Задача 11. Оптимальные траты

Смотреть 7 класс, задачу №1.

# Задача 12. Редактирование генома—2

Как известно, ДНК представляет из себя строку из четырёх букв: A, C, G и T. Важный вопрос — какие подстроки входят в данную строку (это говорит учёным о том, какие у данного существа есть гены).

В этой задаче мы будем рассматривать произвольные подстроки, в том числе и пересекающиеся. Например, в строку AGGAAAGGAGT подстрока AA входит два раза: с 4 и с 5 символа (да, эти вхождения частично пересекаются). Однако в строку AGA подстрока AA не входит ни разу (поскольку в исходной строке нет двух букв A рядом).

**A.** В ДНК некоторого животного есть такой фрагмент:

AGACGTAGACCGACTG

Укажите трёхбуквенную подстроку в этом фрагменте, встречающуюся наибольшее число раз.

***Решение:*** Простой подсчёт (проверим каждый трёхбуквенный фрагмент, их всего 14): GAC — 3 раза.

**B.** В данном пункте мы разрешим иметь не более двух ошибок при сравнении строки и подстроки. В строку AAAAC подстрока AACC входит два раза: с двумя ошибками с первого символа, и с одной ошибкой — со второго. А какая подстрока из трёх символов входит в строку AGACGTAGACCGACTG наибольшее число раз, если мы разрешим иметь до двух ошибок при сравнении?

***Решение:*** GGG — 12 раз (кроме двух вхождений, где нет буквы G).

Покажем, что большего числа вхождений нет ни у какой подстроки. Давайте для начала подсчитаем, сколько есть различных вхождений подстрок, в которых заранее выбранный символ $w$ стоит на 1, 2 или 3 позиции? Получится следующая таблица:

| $w$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| A | 5 | 4 | 4 |
| C | 4 | 4 | 4 |
| G | 4 | 4 | 4 |
| T | 1 | 2 | 2 |

Поясним, например, клетку (T,2): подстрока $x$T$z$ входит в строку два раза: начиная с 5 позиции строки (GTA) и с 14 позиции (CTG).

Теперь пусть дана подстрока $xyz$ — нас устроит любое вхождение этой подстроки, в котором есть совпадение хотя бы одного символа. То есть общее количество вхождений данной подстроки не может превосходить суммы чисел в позициях $(x, 1)$, $(y, 2)$ и $(z, 3)$ таблицы, но может быть меньше.

Сумма не может превосходить $13 = 5 + 4 + 4$. Если сумма равна 13, то она должна использовать клетку (A,1) — то есть соответствовать подстрокам вида A$xy$, при этом $y$ — это A, C, или G. Однако подстроки A$x$A, A$x$C и A$x$G входят в строку — то есть некоторые из вхождений подстроки подсчитаны в таблице несколько раз и сумма 13 не достигается.

Итак, количество вхождений не превосходит 12, случай же 12 реализуется для GGG.

**C.** Теперь мы допускаем не только ошибки при сравнении, но и добавление и удаление символов. Например, в строку AGT подстрока ACTT входит с двумя изменениями: можно удалить символ C и заменить первый T на G. Какая подстрока из трёх символов входит в строку AGACGTAGACCGACTG наибольшее число раз, если мы разрешим иметь до двух изменений при сравнении?

Мы будем считать вхождения различными, только если они начинаются с разных позиций в строке. Скажем, подстрока T входит не более чем с одним изменением в строку AT два раза, хотя мы можем прочесть её в строке как минимум тремя способами.

***Решение:*** Наибольшее число раз входит, например, подстрока CAG — её можно прочесть в исходной строке с любой позиции.

В самом деле, фиксируем какую-нибудь позицию исходной строки и рассмотрим два случая:

1. Текущий символ строки совпадает с одним из символов подстроки: тогда выбросим из подстроки остальные два символа. Например, в первой позиции выбросим из CAG символы C и G.
2. Текущий символ строки — T (входящий в строку в позициях 6 и 15). В случае 6 позиции CAG преобразуется в TAG

заменой первого символа. В случае 15 позиции CAG преобразуется в TG заменой первого символа и удалением второго.

# Лучшие «задачи–шутки»

В этом разделе собраны лучшие, по мнению жюри, задачи, предложенные 7–8-классниками в качестве решения пункта **A** задачи «Шутка» соответствующего класса.

## Пчёлкин Никита, 7 класс

В городе живёт мастер, который красит стулья. Однажды к нему пришёл стул и захотел покрасить себя и свой стул. Сколько стульев предстоит покрасить мастеру?

## Миндубаев Филипп, 7 класс

В школе 3 площадки, на которых по 8 классов, в каждом классе по 30 учеников. Для каждого ученика в школе есть по два стула, на которых он сидит, но в каждом классе есть наказанный ученик, который пишет стоя. У каждого класса есть классный руководитель, у которого стул с 8 ножками, потому что чем больше, тем лучше. На каждой площадке 40 кабинетов. Во всех кабинетах с чётными номерами стулья с 4 ножками, а в нечётных — с двумя ножками. Также есть трон для директора школы с 36 ножками из чистого золота! Вопрос: сколько будет 2+2?

# Вандышев Иван, 8 класс

В классе было 20 парт, по два стула за каждой. Стены были синими, дверь коричневая, учитель строгий, доска белая, шкаф большой. Из окна светило солнышко и дул ветерок. Сколько стульев было в классе?

# Рыжик Максим, 7 класс

Великий учёный Вася Пупкин изобрёл вечный двигатель, работающий по принципу Стула. Принцип заключается в следующем: ставится стул, а под него кладутся кнопки. На стул сажают мальчика. Стул резко выдёргивают, и мальчик, упав на кнопки, начинает визжать как поросёнок и подпрыгивает вверх. Падает он снова на кнопки и снова подпрыгивает вверх, каждый раз вырабатывая механическую энергию. Так повторяется бесконечное количество раз. Очень важно, чтобы на мальчике были надеты специальные штаны, к которым не пристают кнопки. Когда Вася тестировал своё гениальное изобретение, он забыл надеть эти штаны, и $\frac{2}{3}$ кнопок накололось на него. Вопрос: сколько кнопок вынимал из себя несчастный учёный, если под стулом их было 126?

# Почётное упоминание

Придумайте задачу и решите её! В условии обязательно должно фигурировать слово «стул», а в решении обязательно должно быть ровно одно арифметическое действие. А сколько будет $2 + 2$?

# Лимаренко Никита, 7 класс

На фабрике по производству телевизоров на основе марсианского песка «Стул и сыновья» токарь 5-го разряда Иннокентий Ольгович

Горизонтальный решил сыграть со сварщиком Геннадием Феодосиевичем Параллельным в игру на пакет 28-мерных невырожденных шоколадных эллипсоидов.

Правила игры очень просты: один из участников загадывает число, после чего второй игрок с завязанными глазами делает два круга вокруг Александровской колонны и, повернувшись трижды на запад, дважды на юго-восток, четырежды на северо-запад и ещё один раз на юго-север, — подбрасывает монетку верхним пальцем третьей ноги.

Первый игрок ловит эту монетку. Если выпала решка, то он умножает своё число на $2^n$, где $n$ — достоинство монеты, делённое на квадратный корень из суммы нынешнего года и загаданного числа.

Если выпал орёл, то первый игрок умножает своё число на 2, после чего совершает ровно столько кругосветных путешествий, сколько у него получилось в результате умножения.

Пока первый игрок совершает кругосветные путешествия, второй рожает драконов: не больше $2^n$ драконов, где $n$ — количество кругостветных путешествий первого, умноженное на достоинство монеты в квадрате и на текущий год.

После возвращения первого из кругосветных путешествий драконы вместе со вторым игроком готовят ему ужин из пенопластовых гвоздей с мозгами автора этой задачи, а потом кормят им первого на воздушном шаре с водородом при свечах. Побеждает тот, кто после этого первым добежит до Парижа и напишет на мостовой решение примера $2 + 2$.

На прибежавшего при этом летит огромная квадратная Луна. Помогите ему — решите этот пример за него, чтобы ему осталось только записать ответ!

# Задачи профильного варианта 7 класса

## Задача 1. Тащим шкаф

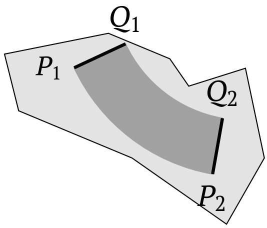
Будем говорить, что связная (состоящая из одного монолитного куска) фигура $F$ на плоскости *вписывает* число $d$, если для любых двух точек $A$, $B$ этой фигуры существуют два отрезка $P_1Q_1$ и $P_2Q_2$, таких что

- каждый из них имеет длину $d$;
- $A$ лежит на $P_1Q_1$, $B$ лежит на $P_2Q_2$;
- можно протащить отрезок отрезок длины $d$ из положения $P_1Q_1$ в положение $P_2Q_2$, так что он всегда будет оставаться внутри фигуры $F$ (включая начальное и конечное положения).

Определим более формально, что значит «протащить»: должны найтись две функции $p(t)$ и $q(t)$, действующие из отрезка $[0, 1]$ в фигуру $F$, такие что

- $p(0) = P_1, \quad p(1) = P_2$;
- $q(0) = Q_1, \quad q(1) = Q_2$;
- отрезок, соединяющий точки $p(t)$ и $q(t)$, при любом $t$ лежит внутри фигуры $F$ и имеет длину $d$.

При этом требуется, чтобы отрезок перемещался плавно, без скачков. Приведём пример такого перемещения:




Пример движения отрезка внутри фигуры

*Пролазностью* фигуры $F$ называется максимальное число $d$, которое она вписывает. Пролазностью несвязной фигуры будем считать минимум из пролазностей её кусков.

**1.** Найдите пролазность

а) квадрата со стороной $a$;

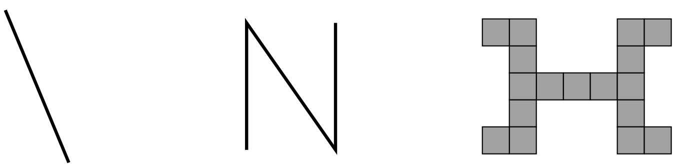
б) прямоугольника со сторонами $a$, $b$;

в) круга радиуса $r$;

г) равностороннего треугольника со стороной $a$.

**2.** Найдите пролазность произвольного треугольника.

**3.** Найдите пролазность фигур на рисунке: (а) отрезка длины $L$ (б) буквы „N“, состоящей из трёх отрезков (в) «гантели» (сторона клетки равна 1 см).



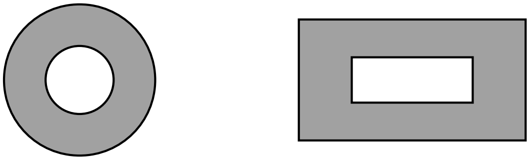
Отрезок Буква N Гантеля

**4.** Рассмотрим *круг с дыркой* и *прямоугольник с дыркой*.

Круг с дыркой получится, если вычесть из круга радиуса $r_1$ круг радиуса $r_2$ с тем же центром, $r_2 < r_1$.

Прямоугольник с дыркой получится, если вычесть из прямоугольника размерами $a_1 \times b_1$ прямоугольник размерами $a_2 \times b_2$ с тем же центром, $a_2 < a_1$ и $b_2 < b_1$.

Найдите пролазность круга с дыркой и пролазность прямоугольника с дыркой (они должны зависеть от параметров этих фигур).



Круг с дыркой и прямоугольник с дыркой

**5.** Приведите пример, когда пролазность подмножества фигуры $F$ строго больше её пролазности.

**6.** Существуют ли такие две фигуры $F_1$ и $F_2$, что

а) Пролазность их объединения строго больше, чем пролазность каждой из них;

б) Пролазность их объединения строго меньше, чем пролазность каждой из них;

в) Пролазность их объединения равна пролазности какой-то из них.

**7.** Существуют ли такие две фигуры $F_1$ и $F_2$, что

а) Пролазность их пересечения строго больше, чем пролазность каждой из них;

б) Пролазность их пересечения строго меньше, чем пролазность каждой из них;

в) Пролазность их пересечения равна пролазности какой-то из них.

**8.** Существует ли такая фигура $F$, что из неё можно вычесть круг очень маленького радиуса, так что

а) Её пролазность уменьшится в 2 раза;

б) Её пролазность увеличится в 2 раза.

Можете ли вы, вычитая маленький круг, изменить пролазность в большее число раз?

**9.** Докажите, что пролазность фигуры строго меньше её *диаметра* — максимального расстояния между её точками. Приведите пример, когда пролазность равна диаметру.

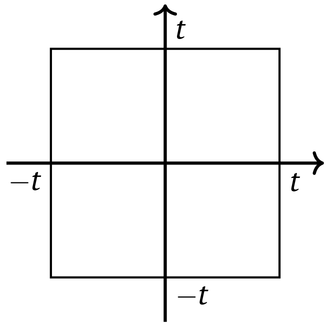
**10.** Пусть дана квадратная сетка с клетками $1 \times 1$. Множество, состоящее из нескольких клеток, будем называть *четырёхсвязным,* если сверху, или снизу, или справа, или слева от каждой из его клеток есть другая его клетка.

Дано число $n$. Укажите, как построить четырёхсвязное множество (а) максимальной, (б) минимальной пролазности, состоящее из $n$ клеток. Посчитайте эти пролазности.

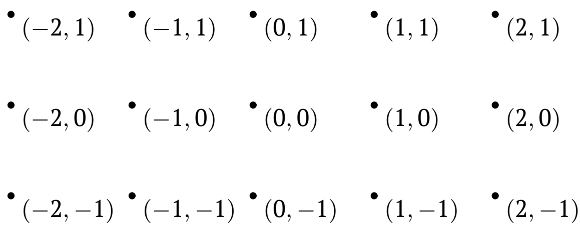
**11.** Решите как можно больше пунктов этой задачи в предположении, что мы таскаем по фигуре не отрезки длиной $d$, а круги радиуса $r$.

# Задача 2. Что видит дизайнер

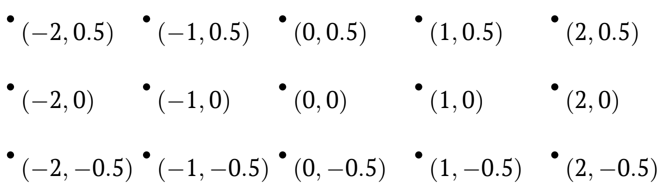
В этой задаче вам предлагается посчитать количество точек, принадлежащих некоторой сетке на плоскости, внутри квадрата со стороной $2t$ и центром в начале координат в зависимости от $t$. Квадрат, который мы будем рассматривать, изображён на рисунке ниже:




1. Посчитайте количество точек с целыми координатами (сетка изображена на рисунке ниже) внутри рассматриваемого квадрата в зависимости от $t$.




2. Теперь рассмотрим сетку, где расстояние между соседними столбцами — 1, а между строками — $\frac{1}{2}$ (изображена на рисунке ниже). Посчитайте количество точек этой сетки внутри квадрата в зависимости от $t$.




3. Растянем сетку из пункта 1 в $a$ раз — получившаяся сетка изображена на рисунке ниже. Сколько точек такой сетки в рассматриваемом квадрате? Число $a$, возможно, не является целым.

| | | |
|---|---|---|
| $\bullet\,(a\cdot -1, a\cdot 1)$ | $\bullet\,(a\cdot 0, a\cdot 1)$ | $\bullet\,(a\cdot 1, a\cdot 1)$ |
| $\bullet\,(a\cdot -1, a\cdot 0)$ | $\bullet\,(a\cdot 0, a\cdot 0)$ | $\bullet\,(a\cdot 1, a\cdot 0)$ |
| $\bullet\,(a\cdot -1, a\cdot -1)$ | $\bullet\,(a\cdot 0, a\cdot -1)$ | $\bullet\,(a\cdot 1, a\cdot -1)$ |

**4.** Теперь сдвинем сетку из пункта 1 на $a$ в сторону — получившаяся сетка изображена на рисунке ниже. Сколько точек этой сетки в нашем квадрате?

| | | |
|---|---|---|
| $\bullet\,(-1, 1+a)$ | $\bullet\,(0, 1+a)$ | $\bullet\,(1, 1+a)$ |
| $\bullet\,(-1, 0+a)$ | $\bullet\,(0, 0+a)$ | $\bullet\,(1, 0+a)$ |
| $\bullet\,(-1, -1+a)$ | $\bullet\,(0, -1+a)$ | $\bullet\,(1, -1+a)$ |

**5.** Рассмотрим теперь сетку с произвольными расстояниями между строками и между столбцами (изображена на рисунке ниже). Сколько точек этой сетки будет в рассматриваемом квадрате в зависимости от $t$?

| | | |
|---|---|---|
| $\bullet\,(a\cdot -1, b\cdot 1)$ | $\bullet\,(a\cdot 0, b\cdot 1)$ | $\bullet\,(a\cdot 1, b\cdot 1)$ |
| $\bullet\,(a\cdot -1, b\cdot 0)$ | $\bullet\,(a\cdot 0, b\cdot 0)$ | $\bullet\,(a\cdot 1, b\cdot 0)$ |
| $\bullet\,(a\cdot -1, b\cdot -1)$ | $\bullet\,(a\cdot 0, b\cdot -1)$ | $\bullet\,(a\cdot 1, b\cdot -1)$ |

**6.** Рассмотрим теперь сетку, расстояние между соседними строками которой — единица, а столбцы наклонены (изображена на рисунке ниже). Посчитайте количество её точек в нашем квадрате.

$(0+a\cdot 1, 1)$ $(1+a\cdot 1, 1)$ $(2+a\cdot 1, 1)$

$(0+a\cdot 0, 0)$ $(1+a\cdot 0, 0)$ $(2+a\cdot 0, 0)$

$(0+a\cdot -1, -1)$ $(1+a\cdot -1, -1)$ $(2+a\cdot -1, -1)$

7. Наконец, рассмотрим сетку с произвольным расстоянием между соседними строками, столбцы которой к тому же наклонены, она изображена на рисунке 7. Сколько точек такой сетки в квадрате из условия?

$(0+a\cdot 2, b\cdot 2)$ $(1+a\cdot 2, b\cdot 2)$ $(2+a\cdot 2, b\cdot 2)$

$(0+a\cdot 1, b\cdot 1)$ $(1+a\cdot 1, b\cdot 1)$ $(2+a\cdot 1, b\cdot 1)$

$(0+a\cdot 0, b\cdot 0)$ $(1+a\cdot 0, b\cdot 0)$ $(2+a\cdot 0, b\cdot 0)$

# Задачи профильного варианта 8 класса

## Задача 1. Миаметры

Картограф Женя хочет понять, какие водоёмы ему надо изображать на карте, а какие не надо. Более того, он хочет придумать такую математическую характеристику, которая показывала бы, насколько данный водоём большой и пригодный к изображению. Ему также хотелось бы, чтобы некоторые части водоёмов были более пригодны к изображению, чем целые водоёмы: например, не имеет никакого смысла рисовать все маленькие заливы большого моря на карте мелкого масштаба.

Жене в голову пришла характеристика, которую он назвал *миаметром*. Итак,

> *миаметром множества $M$ называется наибольшее число $d$ такое, что через каждую точку множества $M$ проходят два перпендикулярных отрезка, длина каждого из которых равна $d$ и которые целиком лежат в $M$.*

Например, миаметр квадрата со стороной 1 равен 1: через каждую точку можно провести два отрезка, параллельных сторонам квадрата.

Давайте поможем Жене изучить другие интересные свойства придуманной им характеристики.

**1.** Найдите миаметр

а) квадрата со стороной $a$;

б) прямоугольника со сторонами $a$, $b$;

в) круга радиуса $R$;

г) равностороннего треугольника со стороной $a$.

**2.** Дан многоугольник. Докажите, что если один из его углов меньше $90^\circ$, то его миаметр равен нулю.

**3.** Приведите пример множества $M$ и его подмножества $N \subset M$ такого, что миаметр $N$ строго больше миаметра $M$.

**4.** Приведите пример двух множеств $K$ и $M$ таких, что миаметр их пересечения $K \cap M$ строго больше миаметра каждого из них.

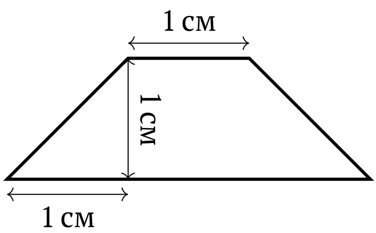
**5.** Докажите, что если миаметр каждого из двух множеств $K$, $M$ больше некоторого числа $t$, то миаметр их объединения также больше $t$.

**6.** Приведите пример, когда миаметр объединения двух множеств $K \cup M$ строго больше миаметров каждого из множеств $K$, $M$.

7. Докажите, что миаметр множества строго меньше *диаметра* этого множества, то есть максимального расстояния между его точками.

8. Дано множество $M$ и число $t$. Докажите, что существует подмножество $R_t \subseteq M$, миаметр которого не меньше $t$ и которое содержит в себе любое другое подмножество $K \subseteq M$ миаметра не меньше $t$.

9. Дана равнобокая трапеция:




Постройте подмножество $R_1$ (его определение написано в предыдущем пункте) для этой трапеции. Докажите, что при $t > 1$ множество $R_t$ будет пустым.

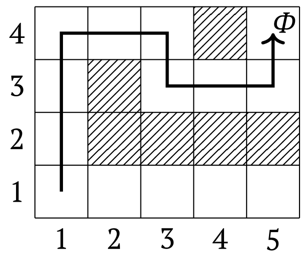
10. Рассмотрите обобщения данной задачи: найдите миаметры и множества $R_t$ для ваших любимых геометрических фигур.

# Задача 2. Что видит дизайнер

Смотреть 7 класс, задачу №2.

# Задача 3. Лабиринт

План лабиринта представляет из себя прямоугольный кусок клетчатой бумаги размером $m \times n$ клеток. Будем сопоставлять каждой клетке две координаты, по горизонтали и по вертикали, как показано на рисунке.




Каждая клетка в лабиринте либо чистая (через соответствующий ей участок можно пройти), либо закрашенная (на местности соответствующий квадрат заполнен камнями, через него пройти нельзя). Также одна из чистых клеток отмечена буквой *Ф* — это *финальная* клетка, её можно узнать на местности.

В этой задаче ходить из клетки можно вверх, вниз, вправо или влево, но не по диагонали.

Путём мы будем называть последовательность чистых клеток, в которой каждая следующая имеет общую сторону с предыдущей; и, кроме того, первая из которой находится в начальной клетке пути, а последняя — в финальной.

1. Путешественнику нужно пройти из клетки $(1, 1)$ в клетку $(m, n)$. Пусть он пользуется «правилом правой руки» — всегда выбирает первую дорогу из тех, что доступны, если перебирать их в порядке обхода против часовой стрелки (то есть, грубо говоря, самую правую). В частности, если путешественник зашёл в тупик, то он должен развернуться.

   Приведите пример, когда он не сможет дойти до финальной клетки, несмотря на то, что путь в лабиринте до неё есть.

2. Модифицируем правило: пусть путешественник отмечает путь, который прошёл, и не ходит два раза по одному и тому же месту (а в остальном также использует правило правой руки). Сможет ли он теперь дойти до финальной клетки в каких-то лабиринтах, всегда ли он может это сделать при наличии пути?

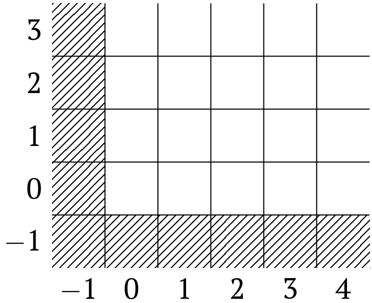
Пусть у путешественника есть *состояние* — он помнит какое-то натуральное число во время хода. Между перемещениями, осмотрев окружающее пространство, он может выбрать новое состояние по какому-то правилу и выбрать направление перемещения.

**4.** Пусть путешественник теперь использует правило $s$-й дороги: на $s$-ом ходе он выбирает дорогу с номером $(s \bmod k) + 1$, где $k$ — количество сходящихся в данной клетке дорог (мы нумеруем дороги по часовой стрелке относительно текущего направления). Здесь $s$ — это состояние путешественника, которое увеличивается на 1 каждый ход.

Сможет ли путешественник хоть в каком-то лабиринте дойти до клетки $(m, n)$? Всегда ли он может это сделать?

**5.** Пусть дан лабиринт $m \times n$, и пусть у путешественника конечное количество состояний. Возможно ли составить такой набор правил поведения для путешественника, что он рано или поздно достигнет финальной клетки в лабиринте, если это возможно?

Но самое интересное — рассматривать подобные лабиринты без внутренних стен на бесконечном поле (стены установлены в клетках, в которых хотя бы одна координата отрицательна — и только в них) и, пытаясь дать разнообразные инструкции путешественнику, смотреть, до каких клеток он может дойти. У путешественника есть *конечное* количество состояний, также путешественник знает своё направление движения и видит соседние клетки. Больше никаких знаний у него нет, в частности, финальная клетка никак не выделена на местности.




**6.** Инструкции могут формулироваться как «поверни налево и сделай шаг», а могут — «поверни на юг и сделай шаг». Объясните, почему мы всегда можем избавиться от слов «налево», «направо», «прямо» и «назад», оставив только стороны света. *Подсказка:* возможно, нам потребуется увеличить число состояний.

**7.** Составьте инструкции для путешественника, чтобы он прошёл из клетки $(0, k)$ в $(k, 0)$. Данное задание и все последующие, в частности, предполагают, что путешественник самостоятельно поймёт, что дошёл до финальной клетки (никаких подсказок на местности нет).

**8.** Составьте инструкции для путешественника такие, чтобы, начиная из клетки $(5n, 0)$, он завершал своё путешествие в клетке $(0, 2n)$.

**9.** Составьте инструкции для путешественника такие, чтобы, начиная из клетки $(n, 0)$, он завершал своё путешествие в клетке $(0, 1)$, если $n$ чётно, и в клетке $(0, 2)$, если $n$ нечётно.

**10.** Составьте инструкции для путешественника такие, чтобы, начиная из клетки $(n, k)$, он завершал своё путешествие в клетке $(0, 1)$, если $n = k$, и в клетке $(0, 2)$, если $n \neq k$.

**11.** Что самое удивительное, с помощью таких действий можно вычислить всё, что можно вычислить на компьютере: даже картинку котика. Не говоря о том, чтобы из клетки $(2^p + 2^q, 0)$ при $p > q$ прийти в клетку $(2^{p-q}, 0)$. Сможете?